

SLOŽENI KAMATNI RAČUN (compound interest)

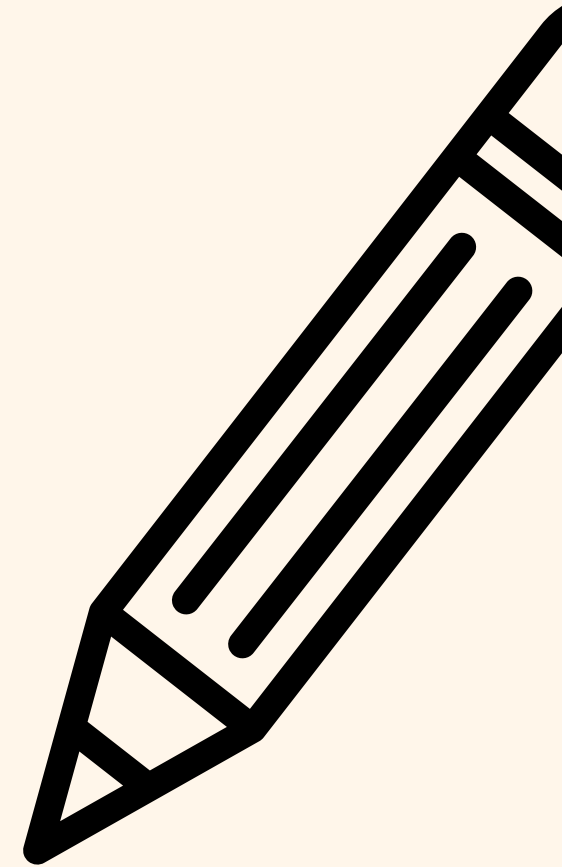
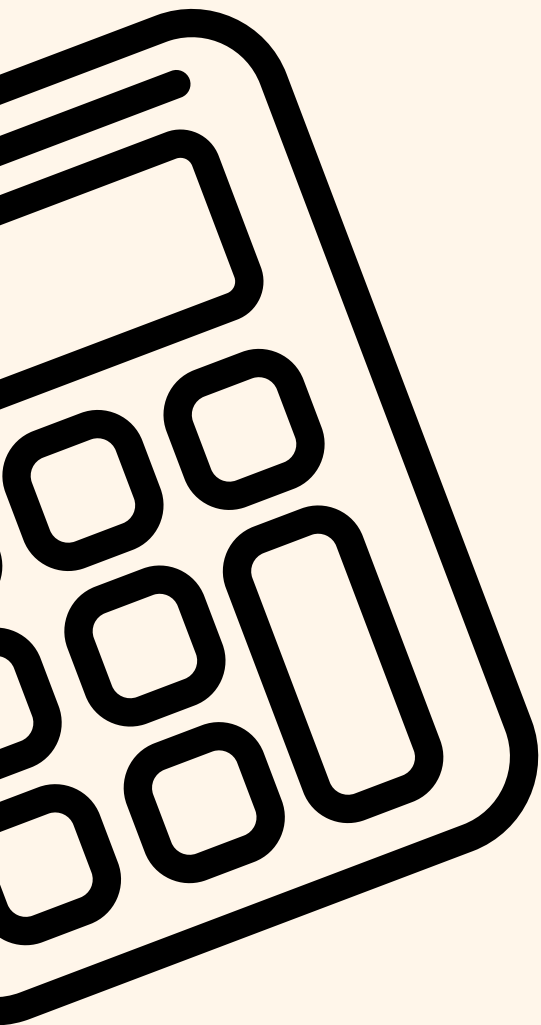
1. Dio

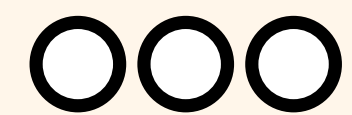
Finansijska matematika — vježbe akademska 2024/2025

Andrej Ševa, andrej.seva@ef.unibl.org

Konsultacije — srijedom od 15.00 do 17.00

Kabinet 401





NOVI POJMOVI



KAPITALISANJE i PERIOD KAPITALISANJA

Podrazumijeva vremenski interval nakon kojeg se obračunata kamata dodaje glavnici. Najčešće se javljaju: godišnje, polugodišnje, kvartalno, mjesečno kapitalisanje

SLOŽENA KAMATA

Kamata koja se ne obračunava samo na glavnicu, već na glavnicu i sve prethodno obračunate kamate. *Interest works for you.*

FINANSIJSKE TABLICE — I, II, III, IV, V tablice



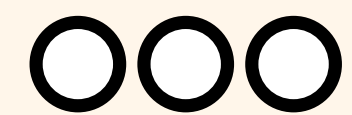
NOVI POJMOVI



I TABLICE (PRVE TABLICE) — FAKTOR AKUMULACIJE

Prikazuje koliko će vrijediti 1 jedinica glavnice nakon određenog broja perioda kapitalisanja pri datoj kamatnoj stopi. Koristi se za računanje buduće vrijednosti ulaganja.

$$I_p^n = (1 + p)^n$$



NOVI POJMOVI



II TABLICE (DRUGE TABLICE) — DISKONTNI FAKTOR

Prikazuje kolika je sadašnja vrijednost iznosa kojeg ćemo dobiti u budućnosti.

$$\Pi_p^n = \frac{1}{(1 + p)^n}$$



NOVI POJMOVI



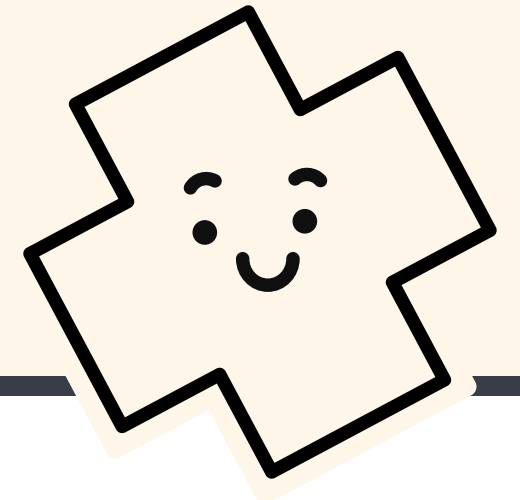
KONTINUIRANO KAPITALISANJE

Proces u kojem se kamata obračunava i dodaje glavnici neprekidno, u beskonačno mnogo vremenskih intervala. Glavnica stalno raste, a kamata se obračunava na novi iznos.

$$K_n = K_0 \cdot e^{n \cdot i}$$

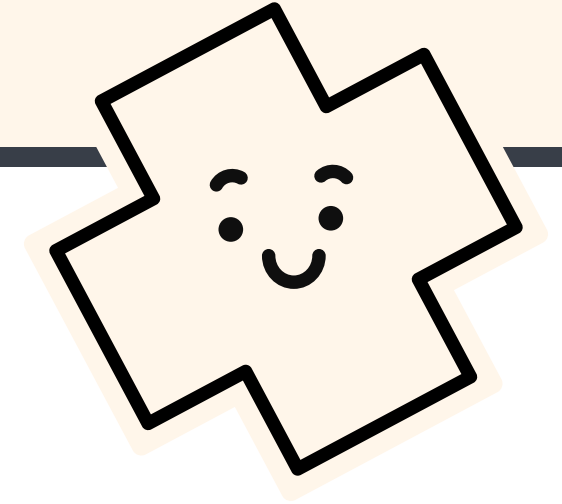
$$K_0 = K_n \cdot e^{-n \cdot i}$$

KAMATNE STOPE



1. **Nominalna kamatna stopa** (data za bazni period, najčešće godinu dana)
2. **Relativna kamatna stopa** (proporcionalni dio nominalne kamatne stope za odgovarajući period kapitalisanja)
3. **Konformna kamatna stopa** (stopa koja odgovara ispogodišnjem periodu kapitalisanja i koja će uz složeni obračun kamate na godišnjem nivou obezbijediti isti iznos kamate kao i nominalna kamatna stopa)
4. **Prosječna kamatna stopa** (ponderisana kamatna stopa koja djeluje tokom posmatranog perioda, uz uvažavanje pojedinačnih rokova dospelja i iznosa)
5. **Ekvivalentna kamatna stopa** (prilagođena nominalna kamatna stopa na određeni manji ili veći period u odnosu na referentnu kamatnu stopu)

KAMATNE STOPE



Nominalna kamatna stopa

$$p; (1 + i)^n$$

$$i = \frac{p}{100}$$

Relativna kamatna stopa

$$p_r = \left(1 + \frac{\frac{p}{m}}{100}\right)^{m \cdot n}$$

$m \rightarrow$ broj kapitalisanja u toku jedne godine
 $n \rightarrow$ broj baznih perioda

Konformna kamatna stopa

$$p_c = \left(\sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}} - 1\right) \cdot 100$$

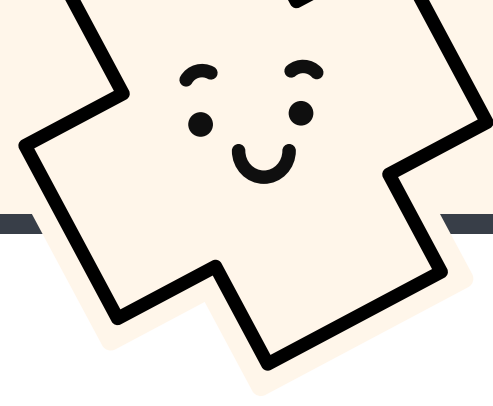
Prosječna kamatna stopa

Stopa srednjeg roka plaćanja

Ekvivalentna kamatna stopa

$$\left(1 + \frac{\frac{p_1}{m_1}}{100}\right)^{m_1} = \left(1 + \frac{\frac{p_2}{m_2}}{100}\right)^{m_2}, \quad m_1 \neq m_2, \quad m_1, m_2 \in \mathbb{N}$$

Primjeri



Primjer 1.

Iznos od 50.000 n.j. Ukamaćen je na period od godinu dana. Prikazati anticipativni i dekurzivni način obračuna kamate, ako je kamatna stopa 8%. U slučaju dekurzivnog obračuna, nakon godinu dana, dobijeni iznos se ukamaćuje još dvije godine uz polugodišnje kapitalisanje. Sa koliko će se raspolagati na kraju 3. godine?

Primjer 2.

Ulagáč je uložio u banku iznos od 20.000 na period od 5 godina uz kamatnu stopu 6% p.a. i a) godišnje, b) polugodišnje, c) tromjesečno kapitalisanje. Izračunati iznos kojim će se raspolagati nakon 5 godina.

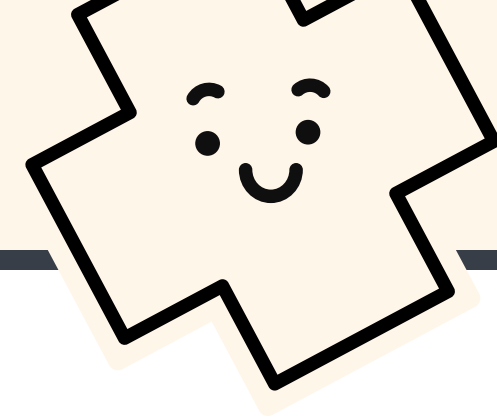
Primjer 3.

Ulagáč je uložio u banku iznos od 20.000 na period od 5 godina uz kamatnu stopu 6% p.a. i a) godišnje, b) polugodišnje, c) tromjesečno kapitalisanje. Izračunati iznos kojim će se raspolagati nakon 5 godina. Sa koliko će se raspolagati nakon 5 godina i 4 mjeseca (primijeniti konformnu kamatnu stopu)?

Primjer 4.

Kolika je nominalna kamatna stopa ako se kamata obračunava tromjesečno i ako je efektivna kamatna stopa 6%?

Primjeri



Primjer 5.

Kolika će biti konačna vrijednost uloga od 50.000 n.j. Nakon 6 godina i 2 mjeseca ako se kamata obračunava polugodišnje po stopi od 6%. Raditi: a) primjenom konformne kamatne stope za nepun obračunski period i b) primjenom relativne kamatne stope za nepun obračunski period (metod kombinacije proste i složene kamatne stope).

Primjer 6.

Ulagач je uložio u banku iznos od 19.000 na period od 10 godina uz kamatnu stopu 5,5% p.a. i a) godišnje, b) polugodišnje, c) tromjesečno kapitalisanje. Izračunati iznos kojim će se raspolagati nakon 5 godina, ako je kamatna stopa korigovana naviše zbog inflacije na 6% nakon 4 godine i 6 mjeseci?

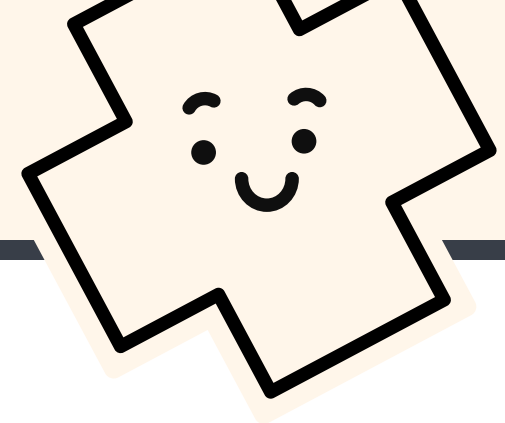
Primjer 7.

Preduzeće treba da plati nakon 3 godine 80.000 n.j. i nakon 7 godina 170.000 n.j. Kojim bi iznosom preduzeće moglo platiti svoje obaveze: a) danas, b) nakon 5 godina, c) nakon 7 godina, ako je kamatna stopa 5% i ako se koristi polugodišnje kapitalisanje?

Primjer 8.

Koliko iznosi srednja kamatna stopa dugovanja, ako dužnik treba da plati 8.000 n.j. nakon 5 godina uz kamatnu stopu 6%; 8.000 n.j. nakon 6 godina uz kamatnu stopu 5% i 10.000 n.j. nakon 8 godina uz kamatnu stopu 3%?

RJEŠENJA



Primjer 1.

Iznos od 50.000 n.j. Ukamaćen je na period od godinu dana. Prikazati anticipativni i dekurzivni način obračuna kamate, ako je kamatna stopa 8%. U slučaju dekurzivnog obračuna, nakon godinu dana, dobijeni iznos se ukamaćuje još dvije godine uz polugodišnje kapitalisanje. Sa koliko će se raspolagati na kraju 3. godine?

Anticipativno

$50.000 - 0,08 \cdot 50.000 = 46.000 \rightarrow$ Korisnik efektivno dobija 46.000, a vraća 50.000.

Dekurzivno

$50.000 + 0,08 \cdot 50.000 = 54.000 \rightarrow$ Korisnik vraća 54.000, a dobija 50.000.

Dekurzivna k.s. koja je ekvivalentna anticipativnoj $\Rightarrow i = \frac{i_a}{1 - i_a}$

$$b. 54.000 \left(1 + \frac{0,08}{2} \right)^{2 \cdot 2} = 63.172,36$$

Primjer 2.

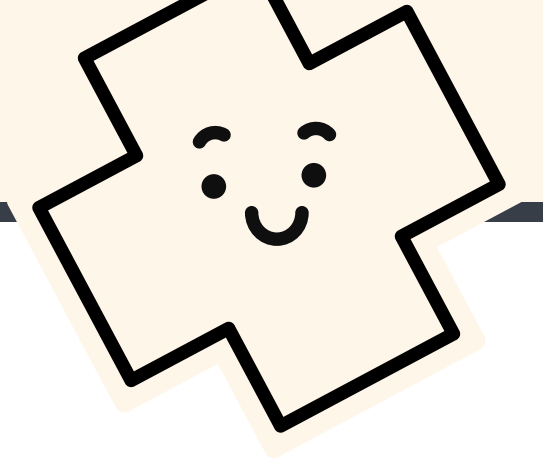
Ulagач je uložio u banku iznos od 20.000 na period od 5 godina uz kamatnu stopu 6% p.a. i a) godišnje, b) polugodišnje, c) tromjesečno kapitalisanje. Izračunati iznos kojim će se raspolagati nakon 5 godina.

$20.000(1,06)^5$ godišnje kapitalisanje

$20.000(1,03)^{10}$ polugodišnje kapitalisanje

$20.000(1,015)^{20}$ tromjesečno kapitalisanje

RJEŠENJA



Primjer 3.

Ulagач je uložio u banku iznos od 20.000 na period od 5 godina uz kamatnu stopu 6% p.a. i a) godišnje, b) polugodišnje, c) tromjesečno kapitalisanje. Izračunati iznos kojim će se raspolagati nakon 5 godina. Sa koliko će se raspolagati nakon 5 godina i 4 mjeseca (primijeniti konformnu kamatnu stopu)?

$$a. 20.000(1,06)^5 \cdot \sqrt[12]{(1,06)^4} = 20.000 \cdot I_{6}^5 \cdot I_{6}^{0,33}$$

$$b. 20.000(1,03)^{10} \cdot \sqrt[6]{(1,03)^4} = 20.000 \cdot I_{3}^{10} \cdot I_{3}^{0,66}$$

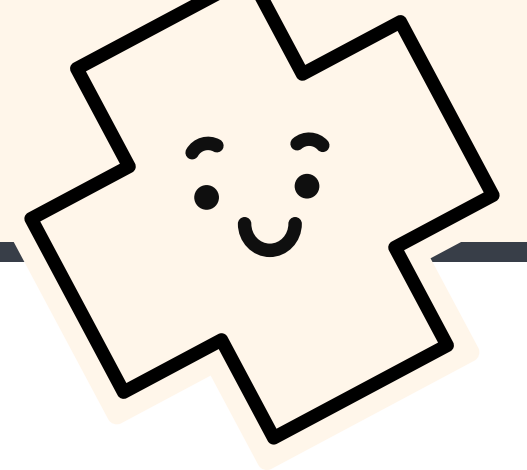
$$c. 20.000(1,015)^{21} \cdot \sqrt[3]{(1,015)} = 20.000 \cdot I_{1,5}^{21} \cdot I_{1,5}^{0,33}$$

Primjer 4.

Kolika je nominalna kamatna stopa ako se kamata obračunava tromjesečno i ako je efektivna kamatna stopa 6%?

$$\left(1 + \frac{\frac{p}{4}}{100}\right)^4 = 1,06 \Rightarrow p = \left(\sqrt[4]{1,06} - 1\right) \cdot 400 = 5,87\%$$

RJEŠENJA



Primjer 5.

Kolika će biti konačna vrijednost uloga od 50.000 n.j. nakon 6 godina i 2 mjeseca ako se kamata obračunava polugodišnje po stopi od 6%. Raditi: a) primjenom konformne kamatne stope za nepun obračunski period i b) primjenom relativne kamatne stope za nepun obračunski period (metod kombinacije proste i složene kamatne stope).

$$a. 50.000 \cdot (1,03)^{12} \cdot \sqrt[6]{(1,03)^2} = 71.993,91$$

$$b. 50.000 \cdot (1,03)^{12} \cdot \left(1 + 0,06 \cdot \frac{2}{12}\right) = 72.000,92$$

Primjer 8.

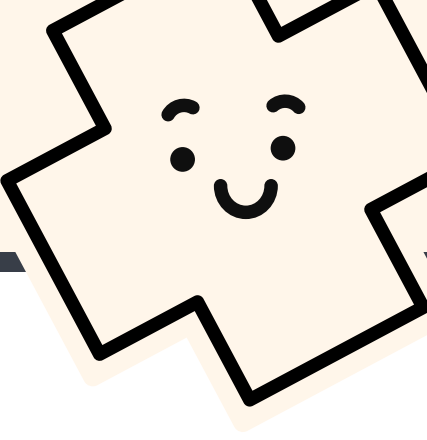
Koliko iznosi srednja kamatna stopa dugovanja, ako dužnik treba da plati 8.000 n.j. nakon 5 godina uz kamatnu stopu 6%; 6.000 n.j. nakon 6 godina uz kamatnu stopu 5% i 10.000 n.j. nakon 8 godina uz kamatnu stopu 3%?

$$K_{\text{početak perioda}(0)} = 8000 \cdot \frac{1}{1,06^5} + 6000 \cdot \frac{1}{1,05^6} + 10000 \cdot \frac{1}{1,03^8} = 18.349,45$$

$$K_{\text{kraj perioda}(8)} = 8000 \cdot 1,06^3 + 6000 \cdot 1,05^2 + 10000 = 26.143,13$$

$$p_{\text{avg}} = \left(\sqrt[8]{\frac{K_{\text{kraj perioda}}}{K_{\text{početak perioda}}}} - 1 \right) \cdot 100 = \left(\sqrt[8]{\frac{26.143,13}{18.349,45}} - 1 \right) \cdot 100 = 4,524\%$$

RAZNI Primjeri



1.

Uloženo je 16.000 uz godišnji obračun kamate. Na kraju druge godine konačna vrijednost uloga bila je 19.184 n.j. Koja je kamatna stopa bila primijenjena u prvoj godini, ako je u drugoj godini kamatna stopa bila povećana za 1 procentni poen?

2.

Preduzeće duguje ... N.j., rok plaćanja 4 godine; 50.000 n.j. Rok plaćanja 5 godina i ... N.j., rok plaćanja 7 godina. Izračunati srednji rok plaćanja ovih dugovanja ako je drugo dugovanje veće od prvog za 15%, a prvo dugovanje manje od trećeg za 30% i ako je kamatna stopa 9%.

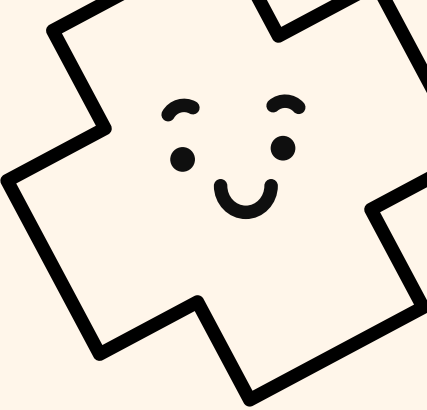
3.

Preduzeće treba da plati nakon 2 godine iznos od 60.000, nakon 5 godina i 2 mjeseca 70.000 i nakon 8 godina i 3 mjeseca 90.000 n.j. Kojim bi iznosom preduzeće moglo platiti svoje obaveze danas, ako se kamata obračunava po stopi od 6% uz polugodišnje kapitalisanje?

4.

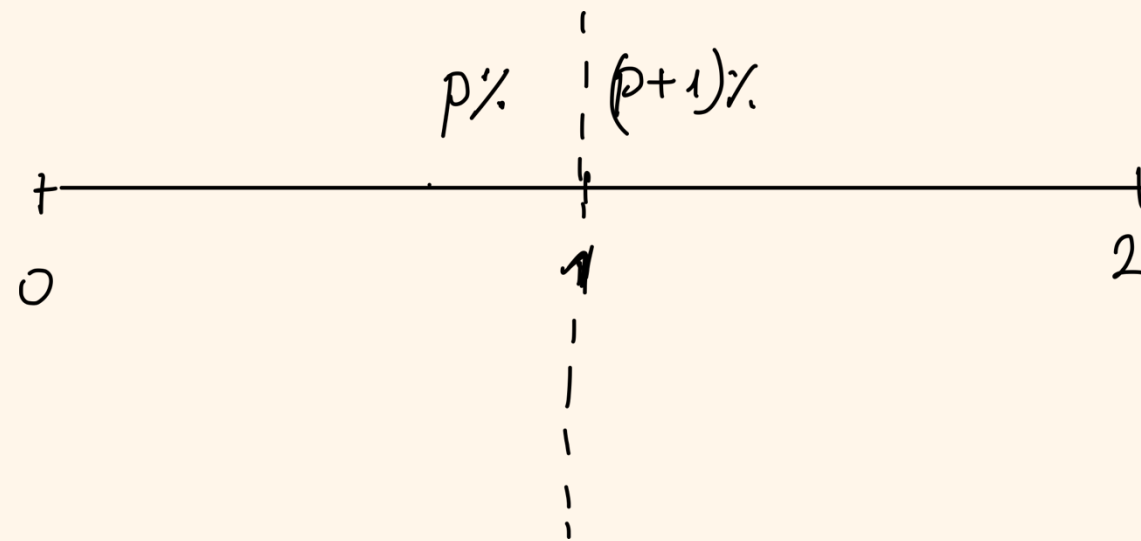
Proizvodnja u preduzeću B se povećava u toku prvih 15 mjeseci po mjesečnoj stopi od 0,2%, a u toku narednih 13 mjeseci po 0,4%. Izračunati: a) kolika je prosječna mjesečna stopa povećanja proizvodnje, b) kolika je proizvodnja bila u 28. mjesecu ako je bazna proizvodnja bila 2.200.000 n.j. i c) kolika je ukupna proizvodnja u toku ovih 28 mjeseci?

RAZNI Primjeri



1.

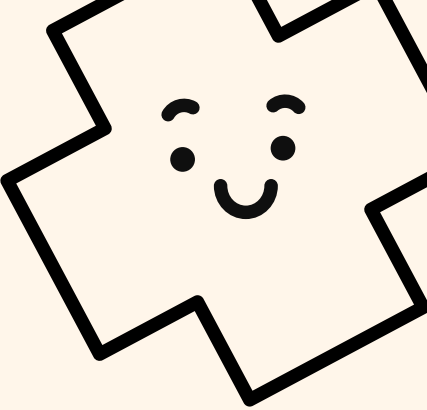
Uloženo je 16.000 uz godišnji obračun kamate. Na kraju druge godine konačna vrijednost uloga bila je 19.184 n.j. Koja je kamatna stopa bila primijenjena u prvoj godini, ako je u drugoj godini kamatna stopa bila povećana za 1 procentni poen?



$$16.000 \left(1 + \frac{p}{100}\right) \left(1 + \frac{p+1}{100}\right) = 19.184$$
$$\dots$$
$$p^2 + 201p - 1890 = 0$$
$$p = 2$$

$$16.000 \cdot \overline{I}_p^1 \cdot \overline{I}_{p+1}^1 = 19.184$$

RAZNI Primjeri



2.

Preduzeće duguje ... N.j., rok plaćanja 4 godine; 50.000 n.j. Rok plaćanja 5 godina i ... N.j., rok plaćanja 7 godina. Izračunati srednji rok plaćanja ovih dugovanja ako je drugo dugovanje veće od prvog za 15%, a prvo dugovanje manje od trećeg za 30% i ako je kamatna stopa 9%.

$$D_2 = 1,15 D_1$$

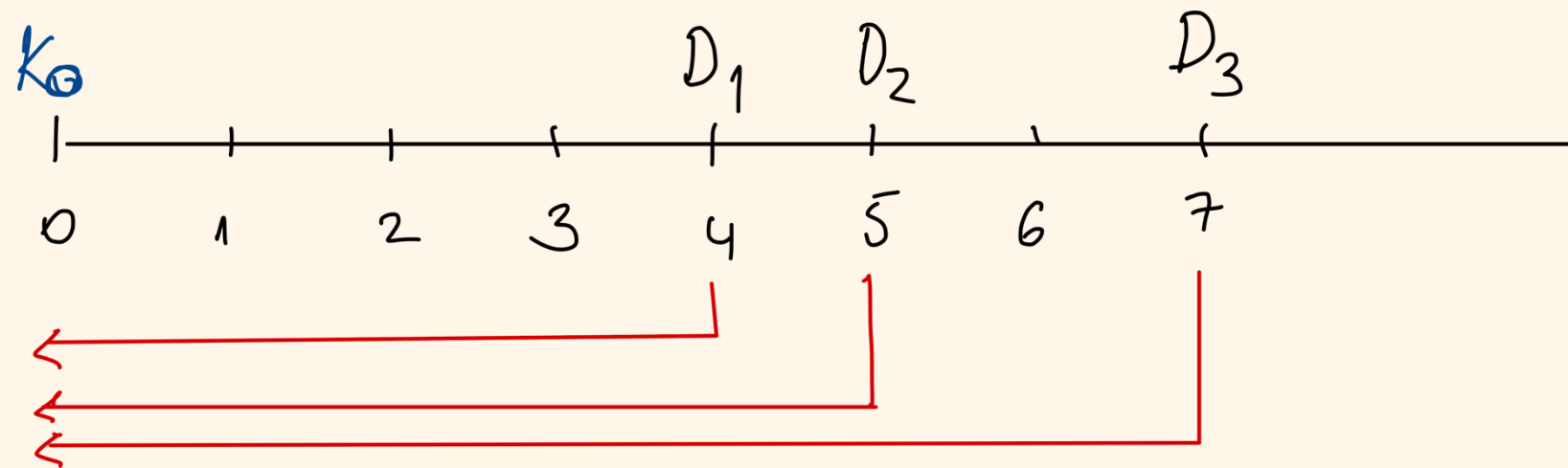
$$D_1 = 0,7 D_3$$

$$i = 9\%$$

$$D_1 = 43.478,26$$

$$D_2 = 50.000$$

$$D_3 = 62.111,80$$



$$\sum D = D_1 + D_2 + D_3 = 155.590,06$$

$$\sum D \cdot \frac{1}{r^{n_s}} = D_1 \cdot \frac{1}{1,09^4} + D_2 \cdot \frac{1}{1,09^5} + D_3 \cdot \frac{1}{1,09^7}$$

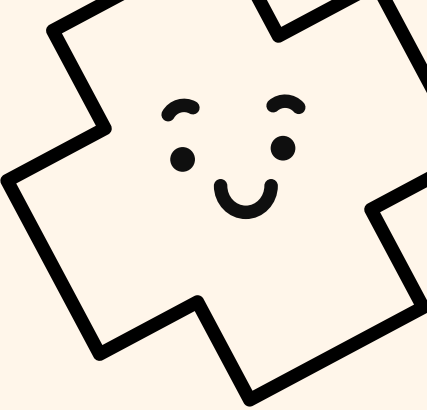
$$n_s \cdot \log 1,09 = \log 1,599487491$$

$$n_s = 5,45 \quad (5 \text{ godina, } 5 \text{ mjeseci : } 12 \text{ dana})$$

$$1,09^{n_s} = 1,599487491 / \log$$

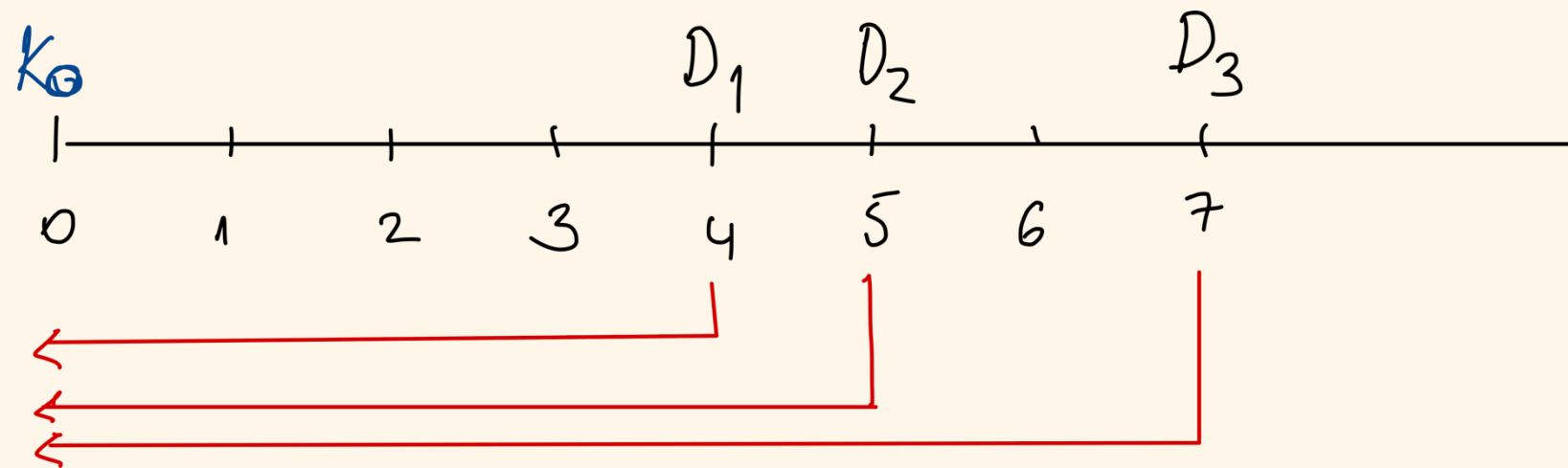
$$\log 1,09^{n_s} = \log 1,599487491$$

RAZNI Primjeri



2.

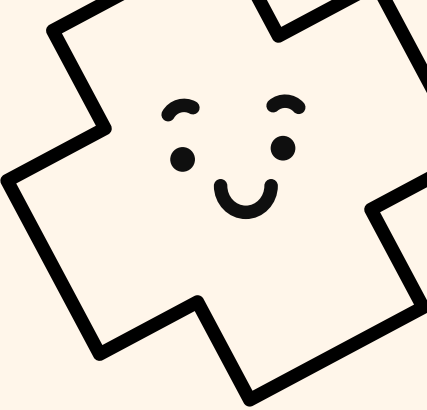
Preduzeće duguje ... N.j., rok plaćanja 4 godine; 50.000 n.j. Rok plaćanja 5 godina i ... N.j., rok plaćanja 7 godina. Izračunati srednji rok plaćanja ovih dugovanja ako je drugo dugovanje veće od prvog za 15%, a prvo dugovanje manje od trećeg za 30% i ako je kamatna stopa 9%.



$$\sum D \cdot \frac{1}{r^{n_s}} = D_1 \cdot \frac{1}{1,09^4} + D_2 \cdot \frac{1}{1,09^5} + D_3 \cdot \frac{1}{1,09^7}$$

$$\sum D \cdot \frac{1}{g^n} = D_1 \frac{1}{g^4} + D_2 \frac{1}{g^5} + D_3 \frac{1}{g^7}$$

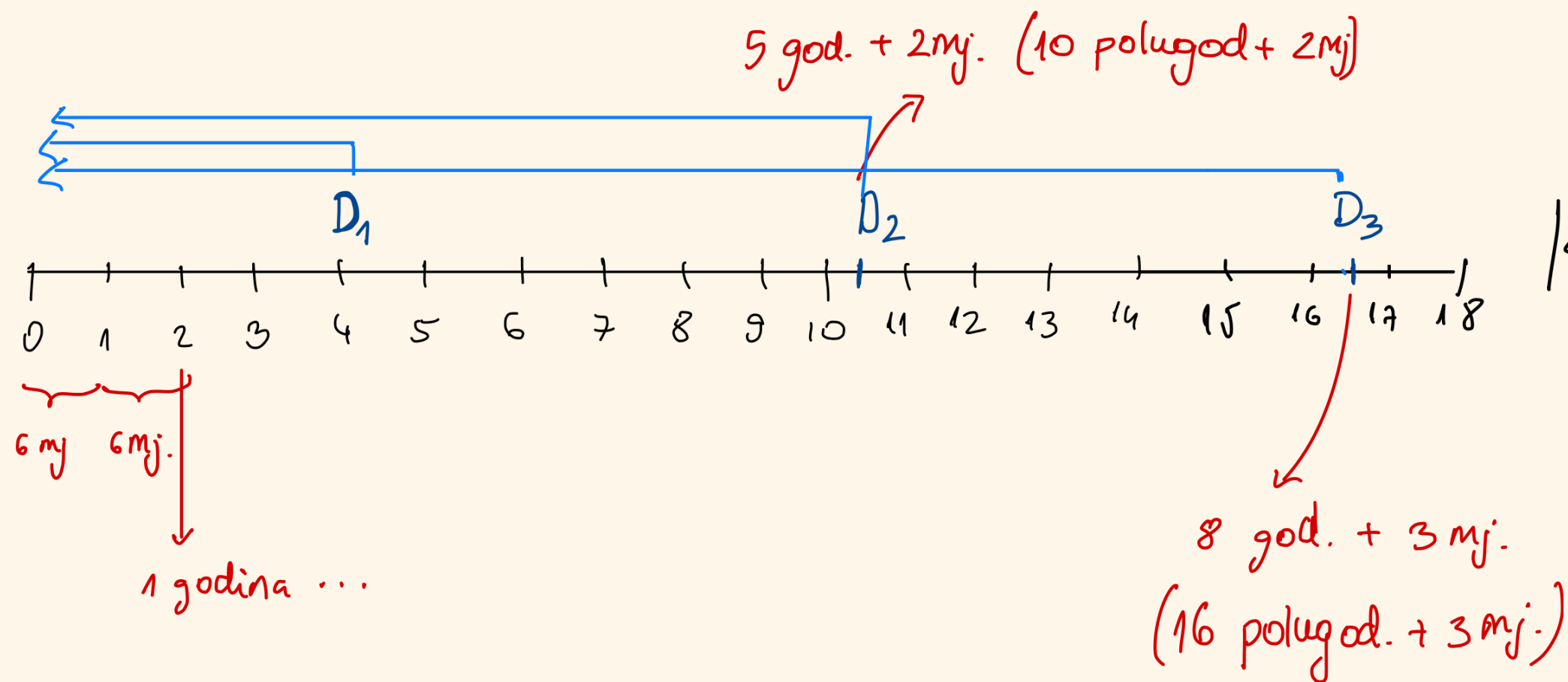
RAZNI Primjeri



3.

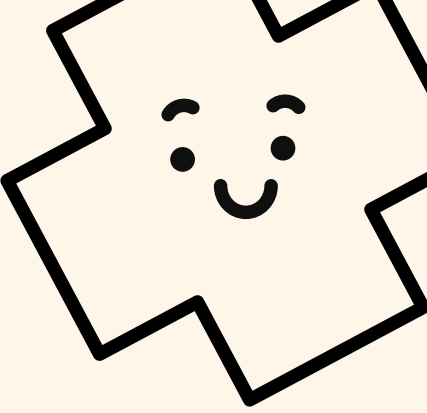
Preduzeće treba da plati nakon 2 godine iznos od 60.000, nakon 5 godina i 2 mjeseca 70.000 i nakon 8 godina i 3 mjeseca 90.000 n.j. Kojim bi iznosom preduzeće moglo platiti svoje obaveze danas, ako se kamata obračunava po stopi od 6% uz polugodišnje kapitalisanje?

Preporuka: Periode na vremenskoj liniji označiti u skladu sa kapitalisanjem koje je dato u zadatku. Npr. 5 godina, polugodišnje kapitalisanje — označavamo 10 perioda



$$K_0 = D_1 \bar{I}_3^4 + D_2 \bar{I}_3^{2/6} \bar{I}_3^{10} + D_3 \bar{I}_3^{3/6} \bar{I}_3^{16}$$

RAZNI Primjeri



4.

Proizvodnja u preduzeću B se povećava u toku prvih 15 mjeseci po mjesečnoj stopi od 0,2%, a u toku narednih 13 mjeseci po 0,4%. Izračunati: a) kolika je prosječna mjesečna stopa povećanja proizvodnje, b) kolika je proizvodnja bila u 28. mjesecu ako je bazna proizvodnja bila 2.200.000 n.j. i c) kolika je ukupna proizvodnja u toku ovih 28 mjeseci?

$P_0 \rightarrow$ bazna proizvodnja

$P_{28} \rightarrow$ proizvodnja u 28. mjesecu

$$a) (1+0,002)^{15} (1+0,004)^{13} = (1+p)^{28}$$

$\rightarrow$ prosječna stopa mj.

b) P_{28}

$$P_0 (1+0,002)^{15} (1+0,004)^{13} = P_{28}$$

Podsjetnik: Suma geometrijskog niza

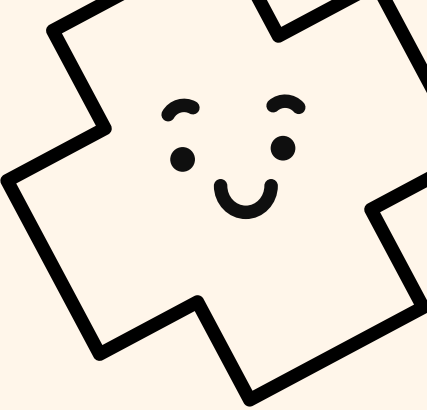
c) T_p

$$S_1 = 2.200.000 \cdot \frac{r_1^{n_1} - 1}{r_1 - 1} = 2.200.000 \cdot \frac{(1,002)^{15} - 1}{0,002}$$

$$S_2 = S_1 \cdot \frac{r_2^{n_2} - 1}{r_2 - 1} = S_1 \cdot \frac{(1,004)^{13} - 1}{0,004}$$

$$\text{Ukupna proizvodnja} = S_1 + S_2$$

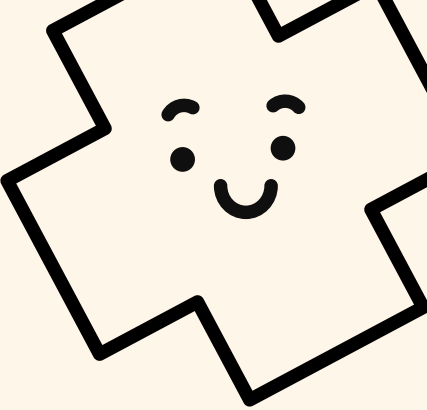
RAZNI Primjeri



5.

Ulagano je redom: 10.000 na kraju 2. godine, ... na početku 5. godine, ... na kraju 24. godine, te serija od tri jednaka uloga na kraju 30, 31. i na početku 35. godine. Prvo ulaganje veće je od drugog za 100%, treći ulog za 70% veći od prvog, i ulog posljednje serije za 240% veći od zbira prvog i drugog uloga. Kapitalisanje u prvih 10 godina bilo je polugodišnje, a potom godišnje sve do 40. godine, kada je ugovoreno mjesečno kapitalisanje. Koliki iznos će biti na raspolaganju na kraju 50. godine? Kamatna stopa je prvih 10 godina bila 5%, potom do kraja 7%.

RAZNI Primjeri

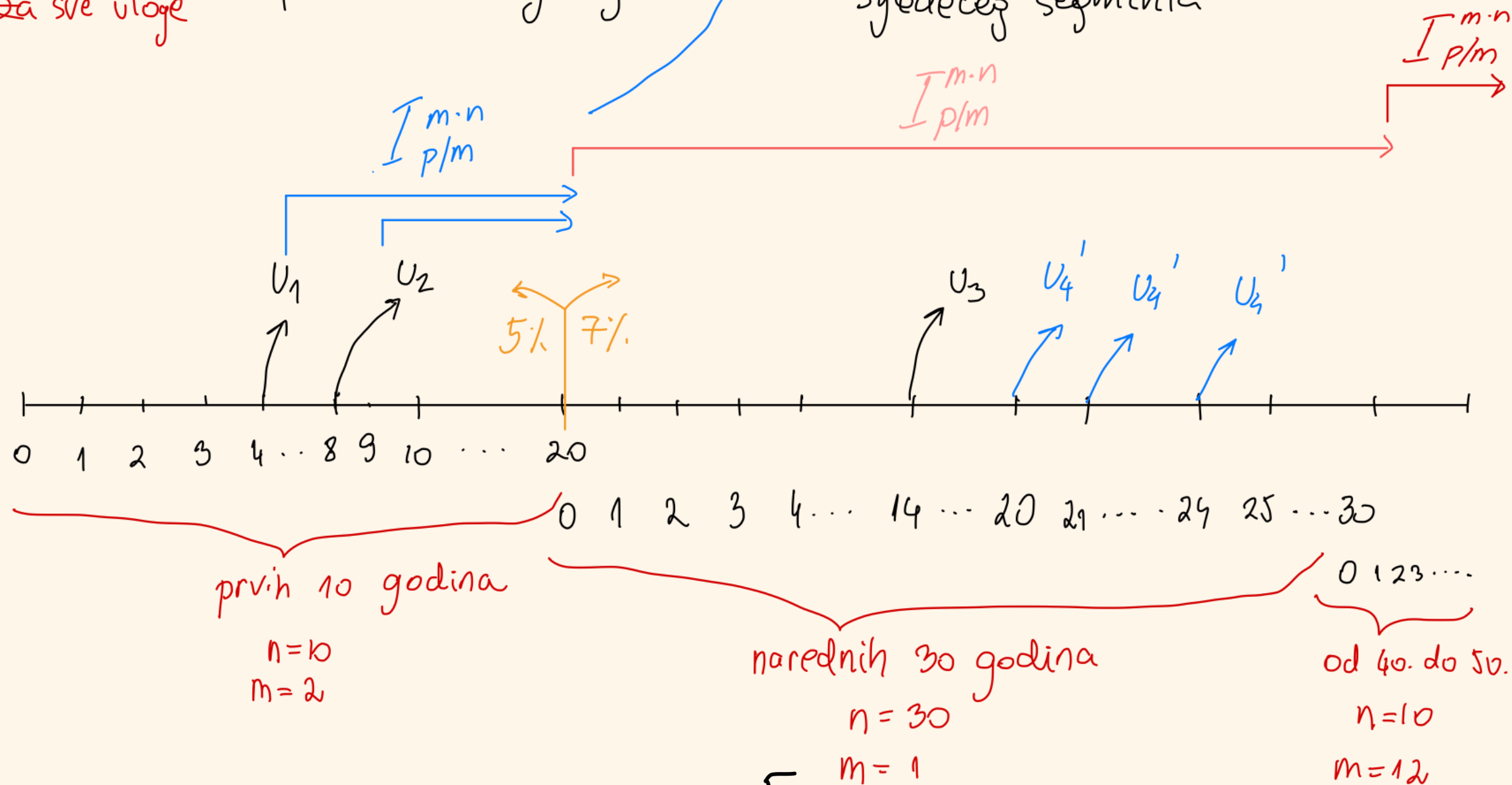


* ova analogija se koristi za sve uloge

U_1 i U_2 se prolongiraju na početak novog segmenta

potom se zajedno prolongiraju na početak sljedećeg segmenta

te na kraj 50. godine



$$K_{50} = (U_1 I_{2,5}^{16} + U_2 I_{2,5}^{12}) I_7^{30} I_{7/12}^{120} + \left[U_3 I_7^{16} + U_4' (I_7^{10} + I_7^9 + I_7^6) \right] I_{7/12}^{120}$$