Сложени каматни рачун

Андреј Шева, асистент

2025/2026 • Финансијска математика — Вјежбе 6

andrej.seva@ef.unibl.org

Консултације: уторком и четвртком 10–12h (кабинет 401) уз претходну најаву

Нови појмови

Капиталисање (обрачун камате) и период капиталисања

- Подразумијева временски интервал након којег се обрачуната камата додаје главници
- Најчешће: годишње, полугодишње, квартално, мјесечно

Сложена камата

- Камата која се не обрачунава само на главницу, већ на главницу и све претходно обрачунате камате
- *Interest works for you*

Финансијске таблице

- I, II, III, IV, V таблице

Приказује колико ће вриједити 1 јединица главнице након одређеног броја периода капиталисања при датој каматној стопи.

Користи се за рачунање будуће вриједности улагања.

$$I_p^n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

гдје је:

- p — каматна стопа по периоду
- n — број периода капиталисања

II таблице — Дисконтни фактор

Приказује колика је садашња вриједност износа којег ћемо добити у будућности.

$$II_p^n = \frac{1}{(1+\frac{p}{100})^n}$$

гдје је:

- p — каматна стопа по периоду
- n — број периода капитализања

Напомена: II_p^n је реципрочна вриједност од I_p^n

Континуирано капиталисање

Процес у којем се камата обрачунава и додаје главници непрекидно, у бесконачно много временских интервала.

Главница стално расте, а камата се обрачунава на нови износ.

Формуле:

$$K_n = K_0 \cdot e^{n \cdot i}$$

$$K_0 = K_n \cdot e^{-n \cdot i}$$

гдје је:

- $e \approx 2{,}71828$ (Ојлеров број)
- n — број година
- i — годишња каматна стопа

Каматне стопе — Преглед

1. Номинална каматна стопа — дата за базни период, најчешће годину дана
2. Релативна каматна стопа — пропорционални дио номиналне каматне стопе за одговарајући период капиталисања
3. Конформна каматна стопа — стопа која одговара испогодишњем периоду капиталисања и која ће уз сложени обрачун камате на годишњем нивоу обезбиједити исти износ камате као и номинална каматна стопа
4. Просјечна каматна стопа — пондерисана каматна стопа која дјелује током посматраног периода, уз уважавање појединачних рокова доспијећа и износа
5. Еквивалентна каматна стопа — приложена номинална каматна стопа на одређени мањи или већи период у односу на референтну каматну стопу

Каматне стопе — Формуле (1/2)

Номинална каматна стопа:

$$p; \quad (1+i)^n; \quad i = \frac{p}{100}$$

Релативна каматна стопа:

$$p_r = \left(1 + \frac{p/m}{100}\right)^{m \cdot n}$$

гдје је m — број капиталисања у току једне године, n — број базних периода

Конформна каматна стопа:

$$p_c = \left(\sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}} - 1\right) \cdot 100$$

Каматне стопе — Формуле (2/2)

Просјечна каматна стопа:

Стопа средњег рока плаћања

Еквивалентна каматна стопа:

$$\left(1 + \frac{p_1/m_1}{100}\right)^{m_1} = \left(1 + \frac{p_2/m_2}{100}\right)^{m_2}, \quad m_1 \neq m_2, \quad m_1, m_2 \in \mathbb{N}$$

гдје је:

- p_1 — nominalna stopa sa m_1 капиталисања
- p_2 — nominalna stopa sa m_2 капиталисања

Примјер 1 — Декурзивни vs. Антиципативни обрачун

Задатак: Износ од 50.000 н.ј. укамаћен је на период од годину дана. Приказати антиципативни и декурзивни начин обрачуна камате, ако је каматна стопа 8%. У случају декурзивног обрачуна, након годину дана, добијени износ се укамаћује још двије године уз полугодишње капиталисање. Са колико ће се располагати на крају 3. године?

Рјешење:

Антиципативно:

$$50.000 - 0{,}08 \cdot 50.000 = 46.000 \rightarrow \text{Корисник ефективно добија 46.000, а враћа 50.000}$$

Декурзивно:

$$50.000 + 0{,}08 \cdot 50.000 = 54.000 \rightarrow \text{Корисник враћа 54.000, а добија 50.000}$$

Укамаћивање 2 године (полугодишње):

$$54.000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}08}{2}\right)^{\mathbf{2 \cdot 2}} = 54.000 \cdot (1{,}04)^{\mathbf{4}} = 63.172{,}36 \text{ н.ј.}$$

Еквивалентна декурзивна стопа за антиципативну: $i = \frac{i_a}{\mathbf{1} - i_a}$

Примјер 2 — Различити периоди капиталисања

Задатак: Улагач је уложио у банку износ од 20.000 на период од 5 година уз каматну стопу 6% p.a. и а) годишње, б) полугодишње, ц) тромјесечно капиталисање. Израчунати износ којим ће се располагати након 5 година.

Рјешење:

$$a)\quad 20.000 \cdot (1{,}06)^5 = 20.000 \cdot 1{,}338226 = 26.764{,}51 \text{ н.j.}$$

$$b)\quad 20.000 \cdot (1{,}03)^{10} = 20.000 \cdot 1{,}343916 = 26.878{,}33 \text{ н.j.}$$

$$c)\quad 20.000 \cdot (1{,}015)^{20} = 20.000 \cdot 1{,}346855 = 26.937{,}10 \text{ н.j.}$$

Закључак: Што је чешће капиталисање, већа је будућа вриједност!

Примјер 3 — Непун период капиталисања

Задатак: Улагач је уложио у банку износ од 20.000 на период од 5 година уз каматну стопу 6% p.a. и тромјесечно капиталисање. Са колико ће се располагати након 5 година и 4 мјесеца (примијенити конформну каматну стопу за непун период)? Користити годишње, полугодишње и квартално капиталисање.

Рјешење:

Конформна каматна стопа за тромјесечно капиталисање:

$$p_c = \left(\sqrt[4]{1{,}06} - 1\right) \cdot 100 = 1{,}467\%$$

Након 5 година тромјесечног капиталисања + 4 мјесеца додатно (1/3 периода):

$$a) \quad 20.000 \cdot (1{,}06)^{5} \cdot \sqrt[12]{(1{,}06)^{4}} = 20.000 \cdot I_{6}^{5} \cdot I_{6}^{0{,}33} = 27.622{,}54 \text{ н.j.}$$

$$b) \quad 20.000 \cdot (1{,}03)^{10} \cdot \sqrt[6]{(1{,}03)^{4}} = 20.000 \cdot I_{3}^{10} \cdot I_{3}^{0{,}66} = 27.628{,}89 \text{ н.j.}$$

$$c) \quad 20.000 \cdot (1{,}015)^{21} \cdot \sqrt[3]{(1{,}015)} = 20.000 \cdot I_{1{,}5}^{21} \cdot I_{1{,}5}^{0{,}33} = 27.332{,}34 \text{ н.j.}$$

Примјер 4 — Номинална vs. Ефективна стопа

Задатак: Колика је номинална каматна стопа ако се камата обрачунава тромјесечно и ако је ефективна каматна стопа 6%?

Рјешење:

$$\left(1+\frac{p/4}{100}\right)^4 = 1{,}06$$

$$1+\frac{p}{400} = \sqrt[4]{1{,}06}$$

$$\frac{p}{400} = \sqrt[4]{1{,}06}-1$$

$$p = \left(\sqrt[4]{1{,}06}-1\right)\cdot 400 = 5{,}87\%$$

Закључак: Номинална стопа (5,87%) је мања од ефективне (6%) јер се камата обрачунава чешће!

Примјер 5 — Комбинација методе

Задатак: Колика ће бити коначна вриједност улога од 50.000 н.ј. након 6 година и 2 мјесеца ако се камата обрачунава полугодишње по стопи од 6%? Радити: а) примјеном конформне каматне стопе за непун обрачунаски период и б) примјеном релативне каматне стопе за непун обрачунски период (метод комбинације просте и сложене каматне стопе).

Рјешење:

а) Конформна стопа:

$$50.000 \cdot (1{,}03)^{12} \cdot \sqrt[6]{(1{,}03)^{2}} = 50.000 \cdot 1{,}426 \cdot 1{,}00995 = 71.993{,}91 \text{ н.j.}$$

б) Комбиновани метод (проста за непун период):

$$50.000 \cdot (1{,}03)^{12} \cdot \left(1 + 0{,}06 \cdot \frac{2}{12}\right) = 72.000{,}92 \text{ н.j.}$$

Напомена: Комбиновани метод даје мало већу вриједност јер проста камата за кратак период генерише више него сложена!

Примјер 8 — Просјечна каматна стопа

Задатак: Колико износи средња каматна стопа дуговања, ако дужник треба да плати 8.000 н.ј. након 5 година уз каматну стопу 6%; 6.000 н.ј. након 6 година уз каматну стопу 5% и 10.000 н.ј. након 8 година уз каматну стопу 3%?

Рјешење:

$$K_{\textbf{почетак периода}(0)} = 8000 \cdot \frac{1}{1{,}06^{\mathbf{5}}} + 6000 \cdot \frac{1}{1{,}05^{\mathbf{6}}} + 10000 \cdot \frac{1}{1{,}03^{\mathbf{8}}} = 18.349{,}45$$

$$K_{\textbf{крај периода}(8)} = 8000 \cdot 1{,}06^{\mathbf{3}} + 6000 \cdot 1{,}05^{\mathbf{2}} + 10000 = 26.143{,}13$$

$$\overline{p} = \left(\sqrt[n]{\frac{K_{\textbf{крај периода}}}{K_{\textbf{почетак периода}}}} - 1 \right) \cdot 100$$

$$= \left(\sqrt[\mathbf{8}]{\frac{26.143{,}13}{18.349{,}45}} - 1 \right) \cdot 100 = 4{,}524\%$$

Задатак 1

Уложено је 30.000 н.ј. данас. У наредне 3 године и 45 дана каматна стопа износи 7%, да би потом била промијењена и наредне 2 године и 184 дана износила 5% уз полугодишње капиталисање.

Која каматна стопа мора бити примијењена наредних 5 година, 8 мјесеци и 36 дана уз квартални обрачун камате, ако желимо да на крају цијеле трансакције располажемо износом који је за 95% већи од иницијалног?

Задатак 1 — Рјешење

Примјена формуле сложеног каматног рачуна са промјенљивим условима:

$$30.000 \cdot I_{3,5}^{6} I_{3,5}^{45/181} I_{2,5}^{5} I_{2,5}^{3/181} I_{p}^{23} I_{p}^{6/90} = 1,95 \cdot 30.000$$

Објашњење:

- Први период: 3 године и 45 дана, стопа 7% полугодишње ($\frac{7\%}{2} = 3{,}5\%$)
- Други период: 2 године и 184 дана, стопа 5% полугодишње ($\frac{5\%}{2} = 2{,}5\%$)
- Трећи период: 5 година, 8 мјесеци и 36 дана $= 5\frac{276}{365}$ година, квартално
- Циљ: 95% повећање иницијалног износа

Потребно је ријешити једначину по p. Тада ћемо добити кварталну релативну стопу, коју онда треба помножити са 4 да би се добила номинална годишња стопа.

Задатак 2

Износ од 1.020 н.ј. доспијева за 1 годину и 3 мјесеца. Други износ доспијева за 2 године и 8 мјесеци и износи 2.090 н.ј. Трећи доспијева за 4 године и 11 мјесеци и износи 3.450 н.ј.

Којим износом би се могла затворити сва дуговања за 3 године од данас, ако је каматна стопа 9% p.a?

Свођење свих износа на тренутак 3 године од данас:

$$P_3 = 1.020 \cdot (1+0{,}09)^{\frac{21}{12}} + 2.090 \cdot (1+0{,}09)^{\frac{4}{12}} + 3.450 \cdot (1+0{,}09)^{-1-\frac{11}{12}}$$

$$P_3 = 1.020 \cdot I_9^{\frac{9}{12}} I_9^1 + 2.090 \cdot I_9^{\frac{4}{12}} + 3.450 II_9^{\frac{11}{12}} II_9^1$$

Задатак 3

За које се вријеме неки улог повећао заједно са сложеним каматама за 120% ако се камате обрачунавају по годишњој каматној стопи 7,3%?

Обрачун камате је:

a. сложен и годишњи

b. сложен и полугодишњи

c. сложен и мјесечни

Задатак 3 — Рјешење

Повећање за 120% значи: $K_n = K_0 + 1{,}20 \cdot K_0 = 2{,}20 \cdot K_0$

а) Годишњи обрачун:

$$U + \frac{120}{100}U = U \cdot (1 + 0{,}073)^n \quad \Rightarrow \quad 2{,}20 = 1{,}073^n$$

б) Полугодишњи обрачун:

$$U + \frac{120}{100}U = U \cdot \left(1 + \frac{7{,}3/2}{100}\right)^{2n} \quad \Rightarrow \quad 2{,}20 = 1{,}0365^{2n}$$

ц) Мјесечни обрачун:

$$U + \frac{120}{100}U = U \cdot \left(1 + \frac{7{,}3/12}{100}\right)^{12n} \quad \Rightarrow \quad 2{,}20 = 1{,}006083^{12n}$$

Ријешити по n помоћу логаритама.

Задатак 4

Дужник треба подмирити дуговања:

- 12.000 н.ј. од прије шест година
- 8.000 н.ј. прије три године
- 5.000 н.ј. прије двије године до данас

Којим износом може подмирити цијели дуг ако је каматна стопа за прве три године била 8%, а за посљедње три године 9% годишње?

Обрачун камата је сложен, годишњи и декурзиван.

Задатак 4 — Рјешење

Свођење свих дуговања на данас:

$$\begin{aligned} K_n = {} & 12.000 \cdot (1 + 0{,}08)^3 \cdot (1 + 0{,}09)^3 \\ & + 8.000 \cdot (1 + 0{,}08)^3 \\ & + 5.000 \cdot (1 + 0{,}08)^2 \end{aligned}$$

Задатак 5

Нека особа уложи данас у банку износ од 20.000 н.ј. Колика је вриједност тог улога на крају десете године (рачунајући од данас) ако је обрачун камата сложен, двогодишњи и декурзиван, а задана је номинална годишња каматна стопа од 2%?

Упоредите стање на рачуну на крају сваке двије године ако се двогодишња камата рачуна:

a. релативно

b. конформно

Задатак 5 — Рјешење (релативна стопа)

а) Релативна двогодишња стопа: $p_{2g} = 2\% \cdot 2 = 4\%$

$$K_0 = 20.000$$

$$K_1 = 20.000 \cdot (1{,}04) = 20.800 \quad \text{(крај 2. године)}$$

$$K_2 = 20.800 \cdot (1{,}04) = 21.632 \quad \text{(крај 4. године)}$$

$$K_3 = 21.632 \cdot (1{,}04) = 22.497{,}28 \quad \text{(крај 6. године)}$$

$$K_4 = 22.497{,}28 \cdot (1{,}04) = 23.397{,}17 \quad \text{(крај 8. године)}$$

$$K_5 = 23.397{,}17 \cdot (1{,}04) = 24.333{,}06 \quad \text{(крај 10. године)}$$

Задатак 5 — Рјешење (конформна стопа)

б) Конформна двогодишња стопа:

$$p_c = \left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right] \cdot 100 = \left[\left(1 + \frac{2}{100}\right)^{\frac{1}{0,5}} - 1\right] \cdot 100 = 4{,}04\%$$

Коначна вриједност:

$$K_{5_{pc}} = K_0 \cdot (1 + 0{,}0404)^5 = 20.000 \cdot 1{,}0404^5 = 24.379{,}89$$

Закључак: Конформна стопа даје већи коначни износ (24.379,89 > 24.333,06) јер је ефективна двогодишња стопа већа код конформног обрачуна.

Задатак 6

Позајмица од 50.000 н.ј. уз номиналну годишњу каматну стопу од 7,5% се акумулира без отплате током 12 година.

a. Израчунајте коначни износ ако се камата обрачунава годишње.
b. Израчунајте коначни износ ако се камата обрачунава континуирано.
c. Одредите апсолутну и релативну разлику између ова два начина капиталисања.

Задатак 6 — Рјешење

а) Годишње капиталисање:

$$K_n = 50.000 \cdot (1 + 0{,}075)^{12} = 119.000 \text{ н.ј.}$$

б) Континуирано капиталисање:

$$K_n = 50.000 \cdot e^{0{,}075 \cdot 12} = 122.980 \text{ н.ј.}$$

ц) Разлике:

i. Апсолутна разлика: $122.980 - 119.000 = 3.980$ н.ј.

ii. Релативна разлика: $\left(\frac{122.980}{119.000} - 1\right) \cdot 100 = 3{,}35\%$

Задатак 7

Инвестиција расте уз номиналну годишњу каматну стопу од 9% која се обрачунава сваких 15 дана.

Одредити колико времена је потребно да се оствари принос од 300%.

Вријеме изразити у годинама, мјесецима и данима (нпр. y година, m мјесеци и d дана).

Претпоставити да година ефективно има 360 дана.

Задатак 7 — Рјешење

Принос од 300% значи: $K_n = K_0 + 3 \cdot K_0 = 4 \cdot K_0$

Период капиталисања: сваких 15 дана $\rightarrow$ $m = \frac{360}{15} = 24$ периода годишње

Директно тражимо n **(године):**

$$P_0 \cdot \left(1 + \frac{\frac{9}{360} \cdot 15}{100}\right)^{24n} = U + \frac{300}{100} U$$

Задатак 8 — Текст (1/2)

Родитељи су орочили штедњу са 10.000 н.ј. када су добили прво дијете. Услови су били такви да је каматна стопа била 4,2% на годишњем нивоу са полугодишњим капитализсањем.

Након 4 године, каматна стопа је повећана на 4,8%, а полугодишње капитализсање је задржано.

Након годину дана од промјене каматне стопе, родитељи су подигли 2.400 н.ј.

Двије године касније, рођењем другог дјетета одлучили су уплатити још 10.000 н.ј. али су одлучили да их коригују за кумулативну инфлацију током 7 година од првог улагања. Годишња инфлација је износила за прве 3 године просјечно 2,9% на годишњем нивоу, а надаље 5,1% исто на годишњем нивоу.

Задатак 8 — Текст (2/2)

На 15. рођендан првог дјетета уговорено је континуирано капиталисање.

Када прво дијете постане пунољетно, договорено је да се акумулирани износ подијели у сразмјери колико старије дијете буде, релативно посматрано, старије од млађег дјетета за своје пунољетство.

Колико ће добити прво, а колико друго дијете на дан пунољетства првог дјетета?

Задатак 8 — Рјешење

Акумулирани износ на 18. рођендан првог дјетета:

$$\left\{\left[(10.000 \cdot (1+0{,}021)^{\mathbf{8}} \cdot (1+0{,}024)^{\mathbf{2}} - 2.400) \cdot (1+0{,}024)^{\mathbf{4}} + 13.300\right] \cdot (1+0{,}024)^{\mathbf{16}}\right\} \cdot e^{\mathbf{3 \cdot 0{,}048}} = 40.974,27$$

Корекција за инфлацију:

$$10.000 \text{ кориговано за инфлацију} \Rightarrow 10.000 \cdot (1{,}029)^3 \cdot (1{,}051)^4 = 13.294{,}04 \approx 13.300$$

Подјела акумулираног износа:

$$\text{Прво дијете} = \frac{18}{18+11} \cdot 40.974,27 \approx 25.432,35$$
$$\text{Друго дијете} = \frac{11}{18+11} \cdot 40.974,27 \approx 15.541,96$$

(Друго дијете има 11 година када прво навршава 18)

Хвала на пажњи!

Питања?