

Vježbe — Složeni kamatni račun rješenja

- 1.** Uloženo je 30.000 n.j. danas. U naredne 3 godine i 45 dana kamatna stopa iznosi 7%, da bi potom bila promijenjena i naredne 2 godine i 184 dana iznosila 5% uz polugodišnje kapitalisanje. Koja kamatna stopa mora biti primijenjena narednih 5 godina, 8 mjeseci i 36 dana uz kvartalni obračun kamate, ako želimo da na kraju cijele transakcije raspoložemo iznosom koji je za 95% veći od inicijalnog?

$$30.000(1 + 0,07)^{3\frac{45}{365}} \cdot (1 + 0,025)^{2\frac{184}{365} \cdot 2} \cdot \left(1 + \frac{\frac{p}{4}}{100}\right)^{5\frac{276}{365} \cdot 4} = 30.000(1 + 0,95)$$

- 2.** Iznos od 1.020 dospijeva za 1 godinu i 3 mjeseca. Drugi iznos dospijeva za 2 godine i 8 mjeseci i iznosi 2.090 n.j. Treći dospijeva za 4 godine i 11 mjeseci i iznosi 3.450. Kojim iznosom bi se mogla zatvoriti sva dugovanja za 3 godine od danas, ako je kamatna stopa 9% p.a?

$$P3 = 1,020 \cdot (1 + 0,09)^{-\frac{9}{12}} + 2.090(1 + 0,09)^{-\frac{4}{12}} + 3.450(1 + 0,09)^{-1 - \frac{11}{12}}$$

- 3.** Za koje se vrijeme neki ulog povećao zajedno sa složenim kamatama za 120% ako se kamate obračunavaju po godišnjoj kamatnoj stopi 7,3%? Obračun kamate je: **a.** složen i godišnji; **b.** složen i polugodišnji; **c.** složen i mjesečni?

$$a. U + \frac{120}{100}U = U(1 + 0,073)^n$$

$$b. U + \frac{120}{100}U = U \left(1 + \frac{\frac{7,3}{3}}{100} \right)^{2n}$$

$$c. U + \frac{120}{100}U = \left(1 + \frac{\frac{7,3}{12}}{100} \right)^{12n}$$

- 4.** Dužnik treba podmiriti dugovanja: 12.000 n.j. od prije šest godina, 8.000 n.j. prije tri godine i 5.000 n.j. prije dvije godine do danas. Kojim iznosom može podmiriti cijeli dug ako je kamatna stopa za prve tri godine bila 16%, a za posljednje tri godine 20% godišnje? Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivan.

$$Kn = 12.000(1 + 0,16)^3(1 + 0,2)^3 + 8.000(1 + 0,2)^3 + 5.000(1 + 0,02)^2$$

5. Neka osoba uloži danas u banku iznos od 20.000 n.j. Kolika je vrijednost tog uloga na kraju desete godine (računajući od danas) ako je obračun kamata složen, dvogodišnji i dekurzivan, a zadana je nominalna godišnja kamatna stopa od 2%? Uporedite stanje na računu na kraju svake dvije godine ako se dvogodišnja kamata računa **a.** relativno i **b.** konformno.

$$K_0 = 20.000$$

$$K_1 = 20.000(1,04) = 20.800$$

$$K_2 = 20.800(1,04) = 21.632$$

$$K_3 = 21.632 \cdot (1,04) = 22.497,28$$

$$K_4 = 22.497,28 \cdot (1,04) = 23.397,17$$

$$K_5 = 23.397,17 \cdot (1,04) = 24.333,06$$

$$p_c = \left(\left(1 + \frac{p}{100} \right)^{\frac{1}{m}} - 1 \right) \cdot 100 = \left(\left(1 + \frac{2}{100} \right)^{\frac{1}{0,5}} - 1 \right) \cdot 100 = 4,04\%$$

$$K_{5_{pc}} = K_0 \cdot (1 + 0,0404)^5 = 24.379,89$$

6. Pozajmica od 50.000 n.j. uz nominalnu godišnju kamatnu stopu od 7,5% se akumulira bez otplate tokom 12 godina. **a.** Izračunajte konačni iznos ako se kamata obračunava godišnje. **b.** Izračunajte konačni iznos ako se kamata obračunava kontinuirano. **c.** Odredite apsolutnu i relativnu razliku između ova dva načina kapitalisanja.

$$a. 50.000 (1 + 0.075)^{12} = 119.000$$

$$b. 50.000 \cdot e^{0.075 \cdot 12} = 122.980$$

$$c. i. 122.980 - 119.000 = 3.980$$

$$ii. \left(\frac{122.980}{119.000} - 1 \right) \cdot 100 = 3,35\%$$

7. Investicija raste uz nominalnu godišnju kamatnu stopu od 9% koja se obračunava svakih 15 dana. Odrediti koliko vremena je potrebno da se ostvari prinos od 300%. Vrijeme izraziti u godinama, mjesecima i danima (npr. y godina, m mjeseci i d dana). Pretpostaviti da godina efektivno ima 360 dana.

$$P_0 \left(1 + \frac{\frac{9}{360} \cdot 15}{100} \right)^N = U + \frac{300}{100} U \rightarrow N = mn = 24n$$

ili

$$P_0 \left(1 + \frac{\frac{9}{360} \cdot 15}{100} \right)^{24n} = U + \frac{300}{100} U$$

*stepenujemo samo sa N ako želimo da dobijemo broj perioda od 15 dana u toku x broja godina; onda se dobijeni iznos dijeli sa 24 da bi se dobile godine. U ovom slučaju je sve izraženo preko perioda.

*Budući da su nam periodi kapitalisanja poznati, ispravnije bi bilo da stepenujemo sa $m \cdot n$, odnosno $24n$, a kako bismo odmah dobili n kao broj godina.

8. Roditelji su oročili štednju sa 10.000 n.j. kada su dobili prvo dijete. Uslovi su bili takvi da je kamatna stopa bila 4,2% na godišnjem nivou sa polugodišnjim kapitalisanjem. Nakon 4 godine, kamatna stopa je povećana na 4,8 %, a polugodišnje kapitalisanje je zadržano. Nakon godinu dana od promjene kamatne stope, roditelji su podigli 2.400 n.j. Dvije godine kasnije, rođenjem drugog djeteta odlučili su uplatiti još 10.000 n.j. ali su odlučili da ih koriguju za kumulativnu inflaciju tokom 7 godina od prvog ulaganja. Godišnja inflacija je iznosila je za prve 3 godine iznosila prosječno 2,9% na godišnjem nivou, a nadalje 5,1% isto na godišnjem nivou. Na 15. rođendan prvog djeteta ugovoreno je kontinuirano kapitalisanje. Kada prvo dijete postane punoljetno, dogovoreno je da se akumulirani iznos podijeli u srazmjeri koliko starije dijete bude, relativno posmatrano, starije od mlađeg djeteta za svoje punoljetstvo. Koliko će dobiti prvo, a koliko drugo dijete na dan punoljetstva prvog djeteta?

$$\{[(10.000(1+0,021)^8(1+0,024)^2 - 2.400)(1+0,024)^4 + 13.300](1+0,024)^{16}\} \cdot e^{3 \cdot 0,048} = \text{Iznos akumuliran na 18. rođendan prvog djeteta}$$

Ovaj iznos se dijeli prema omjeru →

$$\text{Prvo dijete} = \frac{18}{18+11} \cdot (\text{Akumuliran iznos}) = 62,07\% \text{ akumuliranog iznosa}$$

$$\text{Drugo dijete} = \frac{11}{18+11} \cdot (\text{Akumuliran iznos}) = 37,93\% \text{ akumuliranog iznosa}$$

$$!!! \quad 10.000 \text{ korigovano za inflaciju} \Rightarrow 10.000(1,029)^3(1,051)^4 = 13.294,04 \approx 13.300$$

Zadatak za bodove iz aktivnosti^{1,2}

¹Rok: Petak, 4. april 2024. 23.59 CEST

²Pored urađenog zadatka, potrebno je dostaviti kratak dokument gdje se obrazlažu koraci u zadatku i logika rješavanja.

Osoba A ulaže početnih 50.000 n.j. u portfolio sa promjenljivim uslovima. Za prvih 5 godina nudi se kamatna stopa od 8% p.a. sa kvartalnim kapitalisanjem, dok je dividendna stopa 2,5% na godišnjem nivou sa kontinuiranim reinvestiranjem. Nadalje od sve do 15. godine, na početku svake godine lice uplaćuje dodatnih 10.000 n.j, dakle ukupno 10 uplata. Kamatna stopa se nakon prvih 5 godina povećava na 10% p.a. sa kvartalnim kapitalisanjem. Dividendna stopa nakon istog perioda pada na 1,5% godišnje, ali se dividende i dalje reinvestiraju kontinuirano. Izračunati konačnu vrijednost portfolija nakon 15 godina. Odrediti koliko konačni rezultat čine rast početne investicije nasuprot rastu dodatnih uplata (tj. koliki je doprinos kamata i reinvestiranih dividendi u odnosu na same uplate). Procijeniti efektivnu godišnju stopu prinosa za cijeli period.