Садржај

1 ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА

У овом поглављу ћемо поновити основне појмове из елементарне математике, с циљем да студенти могу лакше пратити садржаје предвиђене програмом овог предмета.

1.1 Скупови

Скуп је основни појам у математици, који не дефинишемо. Интуитивно, скупови су колекције различитих објеката. На примјер, скуп имена студената прве године Економског факултета у Бањој Луци, или скуп свих парних природних бројева.
Скупове можемо задати набрајањем елемената, као на примјер $\{2, 4, 6, ...\}$.
Најчешће у математици скупове задајемо описно. На примјер, $\{x \in \mathbb{N} | 1 < x < 9\}$ означава скуп свих природних бројева већих од 1 и мањих од 9.
Према броју елемената, скупове дијелимо на коначне и бесконачне. Припадност елемента скупу означавамо са симболом $\in$. Тако кажемо да $1 \in A$ (1 припада скупу A), при чему је $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Такође, $5 \notin A$ (5 не припада скупу A). Скуп који нема елемената називамо празан скуп и означавамо га са $\emptyset$.

1.1.1 Односи између скупова

Једнакост. За два скупа A и B кажемо да су једнака, и пишемо $A = B$ ако имају исте елементе.

Подскуп. За скуп A кажемо да је подскуп скупа B и пишемо $A \subset B$ ако и само ако је сваки елемент из A уједно и елемент из B.

Надскуп. За скуп A кажемо да је надскуп скупа B и пишемо $A \supset B$ ако и само ако је скуп B подскуп скупа A.

Празан скуп је подскуп сваког скупа.

Скуп од n елемената има 2^n поскупова. На примјер, ако посматрамо скуп $A = \{1, 2, 3\}$, осмочлани скуп његових подскупова је

$$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}.$$

Скуп свих подскупова скупа A називамо партитивним скупом скупа A и означавамо са $P(A)$.

1.1.2 Операције са скуповима

Унија. Унија скупова A и B, у ознаци $A \cup B$, је скуп који чине елементи који припадају бар једном од скупова A или B. На примјер, ако је $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{1, 3, 5\}$, онда је $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$.
За операцију уније вриједе закони комутативности и асоцијативности, односно

$$A \cup B = B \cup A,$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

Пресјек. Пресјек скупова A и B, у ознаци $A \cap B$, је скуп који чине елементи који се налазе у скупу A и у скупу B. На примјер, за претходно наведене скупове A и B је $A \cap B = \{1, 3\}$.

Ако скупови A и B немају заједничких елемената, односно ако је $A \cap B = \emptyset$, за A и B кажемо да су дисјунктни. За операцију пресјека вриједе закони комутативности и асоцијативности, односно

$$A \cap B = B \cap A,$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

За операције пресјека и уније вриједи закон дистрибутивности, односно

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Разлика. Разлика скупова A и B, у ознаци $A \setminus B$, је скуп који чине елементи који се налазе у скупу A, а нису у скупу B. На примјер, за претходно наведене скупове A и B је $A \setminus B = \{2\}$.

Примјер 1

Нека су дати скупови $A = \{-3, -2, -1\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1\}$ и $C = \{1, 2, 3, 4\}$. Имамо да је

$$A \cup (B \cap C) = \{-3, -2, -1\} \cup \{1\} = \{-3, -2, -1, 1\}.$$

Са друге стране,

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{-3, -2, -1, 0, 1\} \cap \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$$
$$= \{-3, -2, -1, 1\}.$$

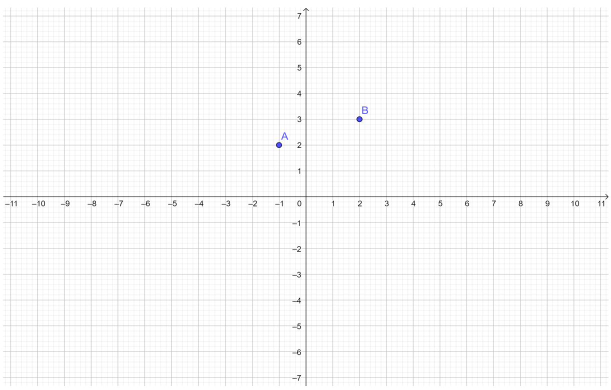
Дакле, видимо да вриједи закон дистрибутивности уније према пресјеку.

Универзални скуп садржи све елементе који се налазе у задатим скуповима. Означавамо га са $\mathcal{U}$. Комплемент скупа A, у ознаци A^C, је разлика универзалног скупа и скупа A. Значи, $A^C = \mathcal{U} \setminus A$.

Декартов производ скупова. Декартов производ скупова A и B, у ознаци $A \times B$ је скуп свих уређених парова (a, b), при чему је $a \in A$ и $b \in B$. Пишемо, $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$. На примјер, ако је $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{a, b\}$, онда је $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$ и $B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3),$
$(b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$. Примјећујемо да је у овом случају број елемената скупа A једнак 3, скупа B једнак 2, и скупа $A \times B$ једнак 6 (производу бројева 2 и 3). У општем случају, ако је број елемената скупа A једнак m, скупа B једнак n, онда је број елемената скупа $A \times B$ једнак mn. Такође, Декартов производ није комутативан, $A \times B \neq B \times A$.
Декатов производ скупа реалних бројева са самим собом је раван

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Елементи скупа $\mathbb{R}^2$ се представљају у правоуглом (Декартовом) координатном систему. На примјер, тачке $A = (-1, 2)$ и $B = (2, 3)$ су приказане са:



1.1.3 Скупови бројева

Скуп природних бројева означавамо са:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Скуп цијелих бројева је:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Рационалан број је број који можемо представити у облику количника два цијела броја a и b, односно у облику разломка $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$. Број a називамо бројилац, а број b именилац разломка. Скуп рационалних бројева означавамо са $\mathbb{Q}$. Рационални бројеви представљени у децималном запису имају или коначно много децимала или бесконачно много децимала које се периодично понављају.
Ирационални број не можемо записати у облику разломка. Скуп ирационалних бројева означавамо са $\mathbb{I}$. Представљени у децималном запису ирационални бројеви имају бесконачно много децимала које се не понављају периодично.

Примјер 2

Бројеви -2 и 15 су цијели. Такође, они су и рационални бројеви, јер их можемо записати као $-2 = \frac{-2}{1}$ и $15 = \frac{15}{1}$.
Бројеви $\frac{5}{6}$ и $\frac{-12}{8}$ су рационални.
Бројеви $\sqrt{3}$ и π су ирационални, јер се показује да се они не могу представити у облику разломка.
Децимални број $2,5$ је рационалан јер се може написати као $\frac{5}{2}$ (има коначан децимални запис).
Број $0,666666\ldots$ је рационалан јер га можемо га представити као $\frac{2}{3}$ (има бесконачан запис који је периодичан).

Унија скупа рационалних и ирационалних бројева је скуп реалних бројева који означавамо са $\mathbb{R}$.
Отворени интервал реалних бројева (a, b), одређен са два реална броја a и b, $a < b$, је скуп

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}.$$

Затворени интервал или сегмент реалних бројева $[a, b]$, одређен са два реална броја a и b, $a \leq b$, је скуп

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}.$$

Полуотворени интервали се дефинишу као:

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\},\ [a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}.$$

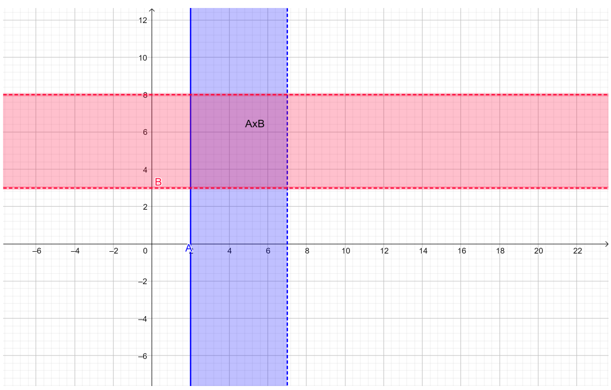
Бесконачни интервали су дати са:

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} | x < a\},\ (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\},$$

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > a\},\ [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}.$$

Примјер 3

Нека су дати скупови $A = [2, 7)$, $B = (3, 8)$ и $C = \{1, 2, 3\}$. У координатној равни скуп $A \times B$ је представљен са:



Апсолутна вриједност броја. Апсолутна вриједност ненегативног броја је тај исти број, док је апсолутна вриједност негативног броја једнака одговарајућем позитивном броју. Апсолутну вриједност реалног броја x означавамо са $|x|$ и дефинишемо као:

$$|x| = \begin{cases} x, \; x \geq 0 \\ -x, \; x < 0. \end{cases}$$

На примјер, $|-3| = 3$, $|4| = 4$, $|0| = 0$, $-|-\sqrt{3}| = -\sqrt{3}$, $\left|\frac{3}{7}\right| = \frac{3}{7}$.

Примјер 4

Функцију $f(x) = -|x+1| + 1$ без знака апсолутне вриједности записујемо као:

$$f(x) = \begin{cases} -x, \; x \geq -1 \\ x+2, \; x < -1. \end{cases}$$

Аритметичке операције. У овом дијелу ћемо поновити основне рачунске операције, са циљем да студентима помогнемо у отклањању грешака које најчешће праве код рачунања аритметичих израза, а које представљају проблем у савлађивању градива.
Уколико у изразу имамо више операција, морамо поштовати њихов приоритет. Прво се примјењују операције множења и дијељења, затим сабирања и одузимања. Множење и дијељење су операције истог приоритета, и унутар једног израза примјењујемо их слијева на десно. Операције сабирања и одузимања су такође истог приоритета и свеједно је којим редослиједом их примјењујемо ако се нађу у једном изразу.

Особине сабирања и множења

1. Закон комутативности за сабирање: $a + b = b + a$.
2. Закон асоцијативност за сабирање: $a + (b + c) = (a + b) + c$.
3. Закон комутативности за множење: $ab = ba$.
4. Закон асоцијативности за множење: $a(bc) = (ab)c$.

5. Закон дистрибутивности: $a(b+c) = ab + ac$.

Примјер 5

$$\frac{\frac{3}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{1-\frac{7}{2}-\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{2}\right)} = \frac{\frac{18+15-10}{30}}{\frac{6-21-4-9}{6}} = \frac{\frac{23}{30}}{\frac{-28}{6}} = -\frac{23\cdot 6}{30\cdot 28} = -\frac{23}{5\cdot 28} = -\frac{23}{140}.$$

Примјер 6

$$1\frac{5}{28}\cdot\left(7\frac{5}{7}\div 3\frac{3}{5}-\frac{1}{7}\right)+5\frac{5}{6}\div\frac{5}{12} = \frac{33}{28}\cdot\left(\frac{54}{7}\div\frac{18}{5}-\frac{1}{7}\right)+\frac{35}{6}\div\frac{5}{12}$$

$$=\frac{33}{28}\cdot\left(\frac{54}{7}\cdot\frac{5}{18}-\frac{1}{7}\right)+\frac{35}{6}\cdot\frac{12}{5} = \frac{33}{28}\cdot\left(\frac{15}{7}-\frac{1}{7}\right)+14 = \frac{33}{28}\cdot 2+14 = \frac{33}{14}+14$$

$$=\frac{33+196}{14} = \frac{229}{14} = 16\frac{5}{14}.$$

1.1.4 Задаци за вјежбање

1. Нека је $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ универзални скуп, и нека су дати његови подскупови

$$A = \{1,4,5,7,9\},\ B = \{1,2,4,6,8\},\ C = \{2,4,6,7,10\}.$$

Одредити скупове $C \cap A^C$, $B \setminus (A \cap C)$, $(C \setminus A) \cup B$.

2. Нека је $A = (2,6]$, $B = (3,7)$, $C = \{1,3\}$, $D = [0,5]$ и $E = \{1,2,3\}$. У координатној равни скицирати скупове $A \times D$, $B \times D$, $C \times D$, $A \times E$, $B \times E$ и $C \times E$.

3. Одредити којим скуповима припадају сљедећи бројеви:

$$3;\ \sqrt{2};\ \frac{\sqrt{5}}{4};\ -\frac{\pi}{3};\ -2,33.$$

4. Поређати сљедеће бројеве по величини:

$$-1;\ 9;\ \pi;\ \sqrt{5};\ |-8|;\ -|-3|;\ -3,1.$$

5. Израчунати $A = \frac{x|y|-y|x|}{|x|-|y|}$ за $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{2}{3}$.

6. Функцију $f(x) = 3|x-1| - x$ написати без знака апсолутне вриједности.

7. Наћи вриједност израза:

$$\left(\frac{2}{15} + 1\frac{7}{12}\right) \cdot \frac{30}{103} - \left(2 \div 2\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{9}{32}.$$

1.2 Проценти

Проценат, у ознаци %, означава дијељење са 100. Дакле, $1\% = \frac{1}{100}$. У процентном рачуну важно је претварати разломке у децималне бројеве и заокруживати децималне бројеве. Тако је, на примјер

$$63\% = \frac{63}{100} = 0,63;$$

$$25,4\% = \frac{25,4}{100} = \frac{254}{1000} = 0,254;$$
$$1,4\% = 0,014.$$

Заокруживање децималних бројева се обично врши на двије децимале. Придржавамо се правила заокруживања:
(1) Ако је прва цифра коју требамо одбацити мања од пет, тада се задња цифра не мијења.

(2) Ако је прва одбачена цифра једнака пет, а послије ње има више цифара, задња цифра се повећава за један.
(3) Ако је прва одбачена цифра једнака пет, а послије ње нема више цифара, онда се задња цифра не мијења ако је парна, а повећава за један ако је непарна.
(4) Ако је прва одбачена цифра већа од пет, онда се задња цифра повећава за један.
На примјер,

$$1,3465 \approx 1,35;$$

$$1,3435 \approx 1,34;$$

$$1,3455 \approx 1,35;$$

$$1,345 \approx 1,34.$$

Примјер 7

Ако је нето плата радника 1500 КМ послије опорезивања од 41%, бруто плату рачунамо на сљедећи начин:
Нека x означава бруто плату.
Порез: $0,41 \cdot x$.
Порез одузимамо од бруто плате: $x - 0,41x = 1500$.
Одавде добијамо да је $0,59x = 1500$, односно $x = 1500 : 0,59 \approx 2542,37$.
Значи да је плата прије опорезивања износила 2542, 37 КМ.

1.2.1 Задаци за вјежбање

1. Израчунати 0.5% од 10^6.

2. Свјеже гљиве садрже 90% воде, а сушене 12%. Колико се kg сушених гљива добије сушењем 44 kg свјежих гљива?

3. У руднику је ископано 2210 тона угља и утврђено је да он садржи 2% влаге. На стоваришту се, услијед честих падавина и дугог стајања, проценат влаге повећао на 15%. За колико се повећава укупна тежина ископаног угља?

4. Марко и Петар су зарадили извјесну количину новца и намјеравали да га подијеле у односу 3 : 5. Грешком је сума подијељена у односу 3 : 2 и тако је Марко добио 360 КМ више него што му припада. Израчунати укупну суму новца, како треба правилно подијелити новац и колико је процената укупне суме новца добио Марко више него што му припада.

5. На тесту су студентима задата три задатка. При томе, 12% студената није ријешило ниједан задатак, 32% је ријешило један или два задатка, а 14 студената је ријешило сва три задатка. Колико је укупно студената радило овај тест?

6. Ако Ана уложи у банку 25000 КМ на годину дана добиће камату од p%. На сав новац који уложи преко 25000 КМ добија $(p+2)$% камате. Колико новца је Ана уложила у банку ако је укупна камата за годину дана била $(p + 0.4)$%?

1.3 Степени и коријени

Дефинишемо n-ти степен реалног броја a, у ознаци a^n, $n \in \mathbb{N}$ као производ броја a са самим собом n пута. Односно,

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-пута}}.$$

Број n зовемо експонент, док број a зовемо база степена. Степеновање броја $a \neq 0$ нулом дефинишемо са:

$$a^0 = 1.$$

Из дефиниције степена јасно је да је

$$1^n = 1.$$

Уколико је експонент степена негативан број, поступамо на сљедећи начин:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ a \neq 0.$$

Примјер 8

$$\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{0} - \left(\frac{2}{3}\right)^{3}}{3^{-1} + 3^{-3}} = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{2} \cdot 1 - \frac{8}{27}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3^3}} = \frac{\frac{16}{9} - \frac{8}{27}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{27}} = \frac{\frac{48-8}{27}}{\frac{9+1}{27}} = \frac{40}{10} = 4.$$

Множење степена са једнаким базама

Ако су базе степена једнаке, онда их множимо тако што базу препишемо, а експоненте саберемо, односно

$$a^n \cdot a^m = a^{m+n};\ m, n \in \mathbb{N}.$$

Примјер 9

$$2a^{-2}b^{-3} \cdot \frac{1}{4}ab^2 = \frac{1}{2}a^{-2+1}b^{-3+2} = \frac{1}{2}a^{-1}b^{-1},\ a, b \neq 0.$$

Дијељење степена са једнаким базама

Слично као и код множења, код дијељења базу препишемо, а експоненте одузмемо:

$$a^m : a^n = a^{m-n},\ a \neq 0,\ m, n \in \mathbb{N}.$$

Примјер 10

$$\frac{5}{24}a^3 \cdot b^2 : \left(\frac{25}{12}a^2 \cdot b^5\right) = \frac{5}{24} \cdot \frac{12}{25}a^{3-2} \cdot b^{2-5} = \frac{1}{10}a \cdot b^{-3},\ b \neq 0.$$

Множење и дијељење степена са једнаким експонентима

Уколико множимо (дијелимо) степене са једнаким експонентима, онда експонент препишемо, а базе помножимо (подијелимо):

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n;$$

$$a^n : b^n = (a : b)^n,\ b \neq 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Примјер 11

$$\left(\frac{4}{5}\right)^y : \left(\frac{2}{25}\right)^y = \left(\frac{4}{5} : \frac{2}{25}\right)^y = \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{25}{2}\right)^y = 10^y;$$

$$5^x \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x = \left(5 \cdot \frac{1}{5}\right)^x = 1^x = 1.$$

Степеновање степена

Ако степен a^n, $n \in \mathbb{N}$ степенујемо бројем $m \in \mathbb{N}$, онда помножимо експоненте n и m, а базу препишемо:

$$(a^n)^m = a^{mn}.$$

Примјер 12

$$(a^4)^4 = a^{4\cdot 4} = a^{16}.$$

Примјер 13

$$(a^{-3}b^4c^{-\frac{3}{5}})^5 = (a^{-3})^5(b^4)^5(c^{-\frac{3}{5}})^5 = a^{-3\cdot 5}b^{4\cdot 5}c^{-\frac{3}{5}\cdot 5} = a^{-15}b^{20}c^{-3},$$

при чему су $a, c \neq 0$.

Наводимо сада неке од најзначајнијих идентитета. За реалне бројеве a и b, вриједи сљедеће.

Разлика квадрата:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

Разлика кубова:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

Збир кубова:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2).$$

Квадрат разлике:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Квадрат збира:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Куб разлике:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Куб збира:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Коријени

За дати реални број x, n-ти коријен је реалан број r који степенован са бројем n даје x, уколико такав број постоји. Дакле,

$$\sqrt[n]{x} = r \Leftrightarrow r^n = x.$$

Коријене можемо посматрати као степене са рационалним експонентом, односно

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}.$$

Наглашавамо овдје да је

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Примјер 14

За $-2 \leq x < 1$, имамо да је

$$\begin{aligned}&\sqrt{x^2-2x+1} - \sqrt{x^2+4x+4} = \sqrt{(x-1)^2} - \sqrt{(x+2)^2}\\ &= |x-1| - |x+2| = -x+1-x-2 = -2x-1.\end{aligned}$$

Примјер 15

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 = 2+\sqrt{3}+2\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}}+2-\sqrt{3}$$
$$= 4+\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 4+2\cdot 1 = 6.$$

1.3.1 Задаци за вјежбање

1. Колико је:

$$\sqrt{4x^2-4x+1}-\sqrt{x^2+2x+1}, \text{ за } -1 \leq x < \frac{1}{2}?$$

2. Израчунати:

$$\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2.$$

3. Израчунати вриједност функције $f(x) = 9x^3 - 9x^2 - x + 1$ за $x = \frac{1-2\sqrt{2}}{3}$.

4. Поједноставити израз:

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\cdot\frac{a-b}{a}.$$

5. Свести на један коријен:

$$\sqrt[3]{\frac{x-2}{x+3}\cdot\sqrt{\frac{x^2-9}{x^2-2x}}}.$$

6. Израчунати вриједност бројног израза

$$\left[\left(a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}})^{0.5} : (a^{-\frac{3}{4}}b^{-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{-\frac{3}{2}},$$

за $a = \frac{1}{16}$ и $b = 2$.

1.4 Операције са алгебарским изразима

Полином P, степена n и промјенљиве x, је дефинисан са:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0;$$

$a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0;\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Бројеви $a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ се називају коефицијенти полинома.

Примјер 16

$x^2 - 3x + 4$ је полином степена 2.

$3x^5 - 4x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x$ је полином степена 5.

5 је полином степена 0.

$\frac{4}{x^2} - 3x - 2$ није полином.

У сљедећим примјерима ћемо показати како средити (упростити) дати алгебарски израз.

Примјер 17

$$\frac{(8a^2-12ab)b^2}{2a(2ab^2-3b^3)}=\frac{4a(2a-3b)b^2}{2ab^2(2a-3b)}=2;\ a\neq 0,\ b\neq 0,\ 2a-3b\neq 0.$$

Примјер 18

$$\begin{aligned}\frac{2x-xy-y+2}{3x+xy+y+3}&=\frac{2(x+1)-y(x+1)}{x(3+y)+y+3}\\&=\frac{(x+1)(2-y)}{(3+y)(x+1)}=\frac{2-y}{3+y};\ x\neq -1.\end{aligned}$$

Примјер 19

$$\frac{1-a}{3a}-\frac{2a+1}{4a^2}+\frac{a}{2a}=\frac{(1-a)\cdot 4a-(2a+1)\cdot 3+a(6a)}{12a^2}$$
$$=\frac{4a-4a^2-6a-3+6a^2}{12a^2}=\frac{2a^2-2a-3}{12a^2};\ a\neq 0.$$

1.4.1 Задаци за вјежбање

У задацима 1.-4. поједноставити дате изразе.

1. $\frac{6x^2y+6xy^2}{3x^2+6xy+3y^2}$.

2. $\frac{ab+a+bc+c}{1-3b+3b^3-b^2}$.

3. $\frac{a^2+2ab+b^2-c^2}{(a+b+c)a+(a+b+c)c}$.

4. $\left(\frac{a^2-a}{a^2+1}+\frac{2a^2}{a^3-a^2+a-1}\right)\left(1-\frac{1}{a^2}\right)$.

5. Одузети разломке:

   (а) $\frac{x-1}{2x} - \frac{1+2x}{x^2} - \frac{x-1}{x^3}$.

   (б) $\frac{a^2-a-6}{a^2-4} - \frac{a-1}{2-a}$.

1.5 Рјешавање неких (не)једначина

Ријешити (не)једначину значи наћи све вриједности промјенљиве (промјенљивих) за које је (не)једначина задовољена.
Линеарна једначина је облика $ax+b=0$, док линеарна неједначина има један од сљедећих облика: $ax+b>0$, $ax+b<0$, $ax+b\geq 0$ или $ax+b\leq 0$, гдје су a и b реални бројеви и $a\neq 0$.

Примјер 20

Ријешићемо једначину:

$$x-6=2x-(5x-7).$$

Имамо:

$$x-6=2x-5x+7$$

$$x-6=-3x+7$$

$$4x=13$$

$$x=\frac{13}{4}.$$

Примјер 21

Неједначину $x-6\geq 2x-(5x-7)$, рјешавамо на сличан начин као и припадну једначину. Односно, добијамо да је:

$$x-6\geq 2x-5x+7$$

$$x + 3x \geq 7 + 6$$

$$x \geq \frac{13}{4}.$$

Дакле, рјешења су сви реални бројеви већи или једнаки од $\frac{13}{4}$, или сви бројеви у интервалу $\left[\frac{13}{4}, \infty\right)$.

Квадратна једначина је једначина облика:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

при чему су a, b и c реални бројеви и $a \neq 0$.
Слично, квадратна неједначина има један од сљедећих облика: $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, или $ax^2 + bx + c \leq 0$; $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.
Рјешења квадратне једначине добијамо помоћу формуле:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

У зависности од вриједности дискриминанте $D = b^2 - 4ac$, квадратна једначина има:
(1) Једно двоструко реално рјешење ако и само ако је $D = 0$.
(2) Два различита реална рјешења ако и само ако је $D > 0$.
(3) Један пар конјуговано комплексних рјешења ако и само ако је $D < 0$.

Примјер 22

Испитаћемо природу рјешења квадратне једначине $x^2 + 3x + m = 0$ у зависности од параметра m.
Дискриминанта је: $D = 9 - 4m$.
Разликујемо три случаја:
(1) $D > 0 \Rightarrow 9 - 4m > 0 \Rightarrow m < \frac{9}{4}$.
(2) $D = 0 \Rightarrow 9 - 4m = 0 \Rightarrow m = \frac{9}{4}$.
(3) $D < 0 \Rightarrow 9 - 4m < 0 \Rightarrow m > \frac{9}{4}$.

Дакле, за $m < \frac{9}{4}$ рјешења су реална и различита, за $m = \frac{9}{4}$ рјешења су реална и једнака, а за $m > \frac{9}{4}$ рјешења су конјуговано комплексни бројеви.

Уколико су x_1 и x_2 рјешења квадратне једначине $ax^2 + bx + c = 0$, онда квадратни трином на лијевој страни једнакости можемо факторисати као:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Примјер 23

Посматрајмо једначину:

$$x^2 + x - 6 = 0.$$

Њена рјешења су:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-6)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}.$$

Дакле, $x_1 = 2$, $x_2 = -3$.

Примјер 24

Ријешићемо неједначину: $x^2 + x - 6 \leq 0$.
Рјешавамо је тако што прво нађемо рјешења припадне квадратне једначине: $x^2 + x - 6 = 0$.
Из претходног примјера знамо да су рјешења $x_1 = 2$ и $x_2 = -3$. Факторишемо квадратни трином као:

$$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3).$$

Испитаћемо знак тринома помоћу табеле:

	$-\infty$ -3	-3 2	2 ∞
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$x+3$	$-$	$+$	$+$
x^2+x-6	$+$	$-$	$+$

Значи, рјешење неједначине је сваки x из интервала $[-3,2]$.

Примјер 25

Посматрајмо једначину:

$$\frac{x}{x-1}+1=\frac{2}{2x+3};\ x\neq -\frac{3}{2}, x\neq 1.$$

Једначину рјешавамо на сљедећи начин:

$$\frac{x+(x-1)}{x-1}=\frac{2}{2x+3},$$

$$\frac{2x-1}{x-1}=\frac{2}{2x+3},$$

$$\frac{2x-1}{x-1}-\frac{2}{2x+3}=0,$$

$$\frac{(2x-1)(2x+3)-2(x-1)}{(x-1)(2x+3)}=0,$$

$$\frac{4x^2+4x-3-2x+2}{2x^2+3x-2x-3}=0,$$

$$\frac{4x^2+2x-1}{2x^2+x-3}=0.$$

Овај разломак је једнак нули када је његов бројилац једнак нули, односно када је:

$$4x^2 + 2x - 1 = 0.$$

Дакле, рјешења су: $x_1 = -1 + \sqrt{5}$ и $x_2 = -1 - \sqrt{5}$.

Једначину у којој се непозната налази под коријеном називамо ирационална.

Примјер 26

Ирационалну једначину $\sqrt{x+7} = x+1$, за $x \geq -1$, рјешавамо тако што квадрирамо обје стране једначине:

$$x + 7 = (x+1)^2,$$

$$x + 7 = x^2 + 2x + 1,$$

$$x^2 + x - 6 = 0.$$

Рјешења ове квадратне једначине су: $x_1 = -3$ и $x_2 = 2$.
Рјешење $x_1 = -3$ одбацујемо јер бисмо у том случају имали да је $\sqrt{4} = -2$, што није могуће.
Дакле, ирационална једначина има само једно рјешење $x = 2$.

1.5.1 Задаци за вјежбање

1. Ријешити сљедеће линеарне једначине:

   (а) $x + \frac{5}{6} = \frac{21}{2}$;

   (б) $\frac{3x}{2} - 7 = 3$;

   (в) $\frac{3x}{4} + 1 = \frac{2x}{3} + \frac{21}{2}$;

   (г) $\frac{1-x}{2} + \frac{1+x}{3} = \frac{5x}{6}$;

   (д) $0,4x + 1,12 - 0,5x + \frac{1}{5} = 0,4$.

2. Ријешити сљедеће квадратне једначине:

   (а) $x^2 - 12x + 35 = 0$;

   (б) $x^2 - 6x + 9 = x - 3$;

   (в) $(x-2)^2 + 2x = 7(x-2)$;

   (г) $(11+x)(14+x) = 304$.

3. Испитати природу рјешења квадратне једначине

$$(n+3)x^2 - 2(n+1)x + n - 5 = 0$$

   у зависности од параметра n.

4. Ријешити сљедеће рационалне једначине:

   (а) $\frac{x-1}{2} + \frac{2x}{3} = \frac{5x}{6}$;

   (б) $\frac{x-3}{x} = -6x + 19$;

   (в) $\frac{x-4}{2x+5} = \frac{x+7}{x-2}$;

   (г) $\frac{x-3}{x-5} + \frac{1}{x} = \frac{x+5}{x(x-5)}$.

5. Ријешити ирационалне једначине:

   (а) $1 + \sqrt{x^2 - 9} = x$;

   (б) $\sqrt{12 - x\sqrt{x^2 - 8}} = 3$.

   (в) $\sqrt{2x+8} + \sqrt{x+5} = 7$.

   (г) $\sqrt{7x-1} - \sqrt{3x-18} = 5$.

1.6 Линеарне функције

Функцијом се изражава зависност једне промјенљиве од једне или више других промјенљивих. Та зависност се обично означава са

$$y = f(x),$$

или

$$y = f(x_1, x_2, .., x_n),$$

уколико имамо више промјенљивих.
Са f се обично означава нека функција, y је зависна промјенљива, док $x, x_1, x_2, .., x_n$ означавају независне промјенљиве.
Наведене изразе читамо као "y је функција од x", или "y је функција од $x_1, x_2, .., x_n$."
У економији често срећемо функцију потражње (d) која изражава зависност потражње за неким производом од његове цијене (p), и ту везу можемо написати као

$$d = f(p).$$

Наравно, потражња за неким производом може, поред цијене, зависити и од других фактора. На примјер, функција

$$d = f(p, p_t) = 12 - 1.5p + 2p_t,$$

зависи од цијене производа p и цијене услуга превоза p_t.

Примјер 27

Нека је потражња за неким производом у зависности од цијене дата табелом:

Потражња	Цијена
44	8.0
67	7.0
93	6.0
124	5.0
162	4.0
210	3.0
280	2.0
400	1.0

Из табеле можемо видјети да потражња расте уколико је цијена мања.

Домен или област дефинисаности функције је скуп вриједности независне промјенљиве за које можемо израчунати вриједности функције.
Нуле (линеарне) функције су вриједности независне промјенљиве за које је вриједност функције једнака нули.
График функције f је скуп тачака у равни $G_f = \{(x, f(x)) | x \in D_f\}$, при чему смо са D_f означили домен функције f.

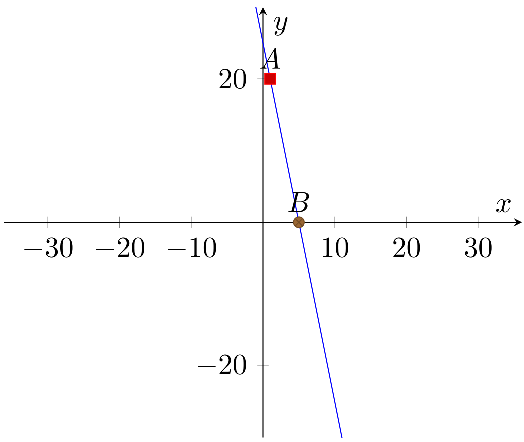
У економији се често сусрећемо са линеарним функцијама. График линеарне функције је права, док је њена једначина дата са:

$$y = f(x) = kx + n.$$

Реални број k се назива коефицијент правца и представља стопу промјене зависне промјенљиве y. С друге стране, реални број n називамо константни члан или пресјек графика функције са y-осом.
Да бисмо нацртали график линеарне функције потребно је наћи двије тачке које задовољавају једначину функције и затим нацртати праву која пролази кроз њих.

Примјер 28

Нека је дата линеарна функција $y = -5x + 25$.
Ако ставимо да је $x = 1$ у једначину функције, онда је $y = 20$. Слично, за $x = 5$ добијамо да је $y = 0$. Дакле, имамо двије тачке које задовољавају једначину функције: $A(1, 20)$ и $B(5, 0)$. Сада можемо нацртати график:



Примјер 29

Један примјер линеарне функције у економији је и ова функција потражње:

$$q(p) = -p + 20,$$

при чему је p ознака за цијену неког производа.
Примјећујемо да се са повећањем цијене потражња смањује.

Дакле, ако се са повећањем (смањивањем) вриједности независне промјенљиве, вриједност функције смањује (повећава), функција је *опадајућа*. Ако се са повећањем (смањивањем) вриједности независне промјенљиве, вриједност функције повећава (смањује), функција је *растућа*. То нам говори и коефицијент правца: уколико је позитиван, функција је растућа, а уколико је негативан, функција је опадајућа.

Код линеарне функције $y = kx + n$, умјесто независне промјенљиве x можемо уврстити било који реални број и затим израчунати вриједност функције y. Према томе, домен линеарне фунцкије је скуп реалних бројева, $\mathbb{R}$. С друге стране, скуп вриједности функције називамо *кодо-*

мен или област вриједности функције. Јасно је да је кодомен линеарне функције скуп реалних бројева.

За $k \neq 0$ линеарна функција има једну нулу, $-\frac{n}{k}$, у којој сијече x-осу, док за $k = 0$ нема нула (функција је константна и њен график је паралелан x-оси).

Тачка пресјека са y-осом графика линеарне функције се добије када уврстимо $x = 0$ у једначину функције.

1.7 Системи линеарних једначина

Дефиниција 1.1

Под системом од m линеарних једначина са n непознатих $x_1, x_2, \dots x_n$ подразумијевамо:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Реалне бројеве $a_{11}, a_{12}, \dots a_{m1}, a_{m2}, \dots a_{mn}$ називамо коефицијенти система, док бројеве $b_1, b_2, \dots b_m$ називамо слободни чланови.

За $m \neq n$ систем називамо правоугаоним, док за $m = n$ кажемо да је систем квадратни.

Дефиниција 1.2

Рјешење горњег система једначина је уређена n-торка

$(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ за коју вриједи да је:

$$\begin{cases} a_{11}r_1 + a_{12}r_2 + \ldots + a_{1n}r_n = b_1 \\ a_{21}r_1 + a_{22}r_2 + \ldots + a_{2n}r_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}r_1 + a_{m2}r_2 + \ldots + a_{mn}r_n = b_m. \end{cases}$$

Дефиниција 1.3

За два (или више) система једначина кажемо да су еквивалентни ако имају иста рјешења.

Дефиниција 1.4

Елементарне трансформације на систему линеарних једначина су:

- Замјена мјеста једначина система.
- Множење једначине са бројем различитим од нуле.
- Множење једне једначине система са бројем различитим од нуле и њено сабирање са неком другом једначином.

Теорема 1.1

Примјеном елементарних трансформација на неком систему линеарних једначина, добијамо систем који има иста рјешења као и полазни (еквивалентни систем).

За систем линеарних једначина кажемо да је сагласан ако има бар једно рјешење. У супротном кажемо да је несагласан. За сагласни систем

вриједи тачно једна од сљедећих тврдњи:
(1) Систем има тачно једно рјешење (систем је одређен).
(2) Систем има бесконачно много рјешења (систем је неодређен).
. У сљедећим примјерима ћемо поновити двије методе за рјешавање система: методу замјене и Гаусову методу.

Примјер 30

Гаусовом методом ћемо ријешити систем:

$$\begin{cases} x - y + 3z = 20 \\ -3x + 4y + 2z = -7 \\ -x + 2y + z = -2. \end{cases}$$

Ако помножимо прву једначину са 3 и саберемо добијену једначину са другом једначином, и затим саберемо прву једначину са трећом једначином, добијамо:

$$\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ \quad y + 11z = 53 \\ \quad y + 4z = 18. \end{cases}$$

Сада ћемо помножити другу једначину са -1 и сабрати са трећом. Слиједи да је:

$$\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ \quad y + 11z = 53 \\ \quad\quad -7z = -35. \end{cases}$$

Када смо свели почетни систем на овај еквивалентни систем троугаоног облика, налазимо најприје z. Из треће једначине имамо да је $z = 5$. Затим стављамо $z = 5$ у другу једначину и добијамо $y = -2$. На крају стављамо $z = 5$ и $y = -2$ у прву једначину и добијамо да је $x = 3$. Значи, рјешење система је уређена тројка $(3, -2, 5)$.

Примјер 31

Ријешићемо методом замјене систем:

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ 2x + 4y + z = 18. \end{cases}$$

С обзиром на то да имамо више промјенљивих него једначина, ставићемо да је $z = t \in \mathbb{R}$.
Из прве једначине система добијамо да је $y = 7 - t - x$.
Замјеном z и y у другу једначину система, добијамо да је $x = 5 - \frac{3}{2}t$.
Дакле, рјешења система су уређене тројке $(5 - \frac{3}{2}t, 2 + \frac{1}{2}t, t);\ t \in \mathbb{R}$.

Примјер 32

Посматрајмо систем:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 15 \\ 2x + 4y = 13. \end{cases}$$

Ако прву једначину помножимо са -1 и добијену једначину додамо другој једначини, добијамо:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 15 \\ \qquad 0 = -2. \end{cases}$$

Друга једначина није могућа, што значи да систем нема рјешења.

Дефиниција 1.5

За систем линеарних једначина кажемо да је хомоген ако су сви слободни чланови једнаки нули, тј. систем облика:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Хомогени систем увијек има тривијално рјешење, n-торку $(0, \ldots 0)$.

Примјер 33

Имамо систем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 \qquad - 9x_3 + x_4 = 0 \\ \quad 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Гаусовом методом, овај систем се своди на еквивалентни:

$$\begin{cases} x_1 \quad - 9x_3 \quad = 0 \\ \qquad x_2 + 3x_3 = 0 \\ \qquad\qquad x_4 = 0. \end{cases}$$

У овом случају можемо изабрати да је $x_3 = t \in \mathbb{R}$.
Рјешења систем су уређене тројке $(9t, -3t, t, 0)$; $t \in \mathbb{R}$.

1.7.1 Задаци за вјежбање

Наћи рјешења сљедећих система:

1.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ -4x + y = 2. \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -3 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 8x_4 = -1 \\ x_1 - 5x_2 - x_3 + 2x_4 = -5. \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + 4x_2 \qquad + 4x_4 = 9. \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} \;\;2x - 3y + z = 0 \\ -11x + 4y - 8z = 0 \\ \;\;x + y + z = 0. \end{cases}$$

2

МАТРИЦЕ И ДЕТЕРМИНАНТЕ

Помоћу матрица се ефикасно рјешавају комплексни системи линеарних једначина који представљају математичке моделе процеса из економског сектора. Између осталог, теорија матрица омогућава употребу линеарног програмирања за добијање рјешења економских проблема.
Истраживање нобеловца у области економских наука, Василија Леонтијева, је утицало на ширење употребе математичих модела у економији. Након његових значајних резултата из 1949. године, истраживачи из многих области, поред економије, почињу интензивно користити компјутере за анализу комплексних математичких модела. Због велике количине података које користе, такви модели су углавном линеарни, односно, представљају се помоћу система линеарних једначина. Значај линеарне алгебре, а самим тим и матрица, у примјени је порастао упоредо са развојем нових генерација хардвера и софтвера.
Илустроваћемо практичну примјену матрица на примјеру фирме која се бави изнајмљивањем путничких возила са различитим бројем сједишта. Доступна возила су: са 2 сједишта-по цијени од 139 КМ, са 4 сједишта-по цијени од 160 КМ, са 6 сједишта-340 КМ и лимузина по цијени од 430 КМ. Потражња возила за наредну седмицу је сљедећа: 4 са 2 сједишта, 3 са 4 сједишта, 12 са 6 сједишта и једна лимузина.

Ако помножимо број тражених возила са њиховом цијеном и добијене производе саберемо, добијамо сљедеће:

$$4 \cdot 139 + 3 \cdot 160 + 12 \cdot 340 + 1 \cdot 430 = 5546 \text{ KM}.$$

Наравно, потражња за возилима ће се мијењати, зато је за рачунање зараде по седмицама практичније податке смјестити у табелу облика:

Врста возила	1. седмица	2. седмица	3. седмица
Са 2 сједишта	4	3	2
Са 4 сједишта	3	7	5
Са 6 сједишта	12	2	7
Лимузина	1	2	1

Дефиниција 2.1

Матрица је правоугаона шема облика:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Чланове ове шеме називамо елементи матрице.
Елементи $a_{i1}, \dots, a_{in}$; $i = 1, \dots, m$, се налазе у i-тој врсти, док се елементи $a_{1j}, \dots, a_{mj}$; $j = 1, \dots, n$, налазе у j-тој колони матрице . A има m врста и n колона, па ћемо рећи да је она реда $m \times n$ (m пута n).
Матрицу краће записујемо као: $A = [a_{ij}]_{m \times n}$; $i = 1, \dots m$, $j = 1, \dots n$.

Скуп свих матрица реда $m \times n$ ћемо означавати са $\mathcal{M}_{m \times n}$.
Сада ћемо податке из примјера са почетка поглавља смјестити у ма-

трицу:

$$V = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 5 \\ 12 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

У матрици V врсте одговарају врсти возила, док колоне одговарају седмицама.
Матрице које имају само једну колону називамо *векторима* (*вектор-колонама*), док матрице које имају само једну врсту називамо *вектор-врстама*. Векторе обично означавамо са малим словима латинице.
На примјер, потражњу возила у првој седмици можемо представити са вектором:

$$p = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Примјер 34

Одредићемо матрицу $A = [a_{ij}]$ реда 2×3, чији су елементи $a_{ij} = (i-j)^2$. Израчунајмо елементе по датом правилу:

$$\begin{aligned} a_{11} &= (1-1)^2 = 0, & a_{12} &= (1-2)^2 = 1, \\ a_{13} &= (1-3)^2 = 4, & a_{21} &= (2-1)^2 = 1, \\ a_{22} &= (2-2)^2 = 0, & a_{23} &= (2-3)^2 = 1. \end{aligned}$$

Дакле, матрица је:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Дефиниција 2.2

Елементарне трансформације на матрицама су:

- Замјена мјеста врста (колона) матрице.
- Множење врсте (колоне) матрице са бројем различитим од нуле.
- Множење једне врсте (колоне) матрице са бројем различитим од нуле и њено сабирање са неком другом врстом (колоном).

Напомињемо да се на матрици не могу примјењивати елементарне трансформације на врстама и на колонама истовремено.

Дефиниција 2.3

Кажемо да је матрица $B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ еквивалентна матрици $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, и пишемо $A \sim B$, ако се B може добити из A примјеном коначно много елементарних трансформација врста (колона).

2.1 Врсте матрица

Квадратне матрице. Ако је број врста матрице A једнак броју колона ($m = n$), онда матрицу називамо квадратном. Кажемо да је ред матрице A једнак n. На примјер, једна квадратна матрица реда 3 је:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 11 & -2 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 5 & -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}.$$

У општем случају, квадратну матрицу A_n записујемо као:

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Скуп свих квадратних матрица реда n означавамо са $\mathcal{M}_n$.
За елементе a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} кажемо да се налазе на главној дијагонали матрице. Збир елемената на главној дијагонали називамо трагом матрице, и означавамо са:

$$Tr(A_n) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$$

Елементи a_{1n}, $a_{2(n-1)}$, …, a_{n1} леже на споредној дијагонали матрице.

Горње (доње) троугаоне матрице. Ако су у квадратној матрици сви елементи испод (изнад) главне дијагонале једнаки нули, матрицу називамо горња (доња) троугаона. Општи облик горње троугаоне матрице је:

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Слично, доња троугаона матрица је облика:

$$B_n = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Дијагоналне матрице. Ако је $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n$ и $a_{ij} = 0$ за $i \neq j$, онда матрицу називамо дијагонална. Општи облик дијагоналне матрице је:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

На примјер, сљедећа матрица је дијагонална:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Јединичне матрице. Дијагоналну матрицу код које су на дијагонали сви елементи једнаки 1, називамо једнична матрица. Обично се означава са I_n, E_n, I или E.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Нула матрице. Ако су сви елементи матрице $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ једнаки 0, матрицу називамо нула матрицом и обично означавамо са $O_{m\times n}$. На примјер,

$$O_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, O_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Редуковане матрице. За матрицу кажемо да се налази у редукованом облику ако вриједи сљедеће:

1. Први број различит од нуле у врсти (водећи коефицијент) је 1.
2. Сваки водећи коефицијент се налази десно од водећег коефицијента у врсти изнад.

3. Врсте које садрже све нуле су увијек испод осталих врста.

На примјер, сљедеће матрице су редуковане.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Свака ненула матрица се помоћу елементарних трансформација врста може свести на редуковану матрицу, тј. еквивалентна је редукованој матрици.

Примјер 35

Свешћемо дату матрицу A, помоћу елементарних трансформација, на њој еквивалентну редуковану матрицу:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Да бисмо добили 1 на мјесту $(1,1)$, одузећемо другу врсту од прве врсте. Резултат је:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Сада ћемо прву врсту помножену са -2 сабрати са другом врстом. Добијамо:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

У сљедећем кораку множимо прву врсту са -4 и сабирамо са трећом врстом:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}.$$

Затим ћемо у истом кораку другу врсту помножену са -1 сабрати са првом врстом, и сабрати другу и трећу врсту:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & -8 \end{bmatrix}.$$

Да бисмо добили 1 на мјесту $(3,3)$, помножићемо трећу врсту са $-\frac{1}{7}$:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{7} \end{bmatrix}.$$

На крају, помножићемо трећу врсту са -3 и добијену врсту ћемо додати првој врсти. Затим ћемо трећу врсту помножену са 2 додати другој врсти. Добијамо:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{7} \end{bmatrix}.$$

2.1.1 Задаци за вјежбање

1. Како називамо сљедеће матрице:

   (а) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 6 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; (б) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

(в) $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; (г) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$?

2. Одредити параметре a и b тако да матрица $\begin{bmatrix} 2a^2-1 & 0 & 0 \\ a^3-8 & 2e^{ab} & a-b \\ 0 & b-a & 0 \end{bmatrix}$ буде дијагонална.

3. Одредити параметре a, b и c тако да матрица $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 \\ c^2 & -\pi & \ln 3 \\ 4-b & 1-a^3 & 5 \end{bmatrix}$ буде горња троугаона.

4. Сљедеће матрице свести на еквивалентне редуковане матрице:
(а) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$; (б) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

2.2 Операције са матрицама

Једнакост матрица. За двије матрице $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ и $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ кажемо да су једнаке, ако су истог реда и ако су им елементи на одговарајућим позицијама једнаки, односно

$$a_{ij} = b_{ij};\ i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n.$$

Примјер 36

Одредићемо непознате $x, y \in \mathbb{R}$ такве да матрице A и B буду једнаке, ако је:

$$A = \begin{bmatrix} x+3 & 4 \\ 1 & 2y \end{bmatrix}, \, B = \begin{bmatrix} -2x & 4 \\ 1 & 1+y \end{bmatrix}.$$

Видимо да су A и B истог реда, тачније $A, B \in \mathcal{M}_2$. Сада ћемо изједначити елементе на једнаким позицијама. Имамо:

$$x + 3 = -2x,$$

$$2y = 1 + y.$$

Одавде слиједи да је $x = -1$ и $y = 1$.

Сабирање (одузимање) матрица. Нека је потражња за возилима у августу и септембру дата сљедећим табелама.
Август:

Врста возила	Бања Лука	Приједор	Бијељина	Требиње
Са 2 сједишта	4	3	2	3
Са 4 сједишта	3	7	5	2
Са 6 сједишта	12	2	7	8
Лимузина	1	2	1	1

Септембар:

Врста возила	Бања Лука	Приједор	Бијељина	Требиње
Са 2 сједишта	5	3	3	4
Са 4 сједишта	4	6	6	3
Са 6 сједишта	11	3	6	9
Лимузина	2	1	1	1

Желимо да нађемо укупну потражњу за возилима у августу и септембру. Податке из табеле ћемо смјестити у двије матрице:

$$A=\begin{bmatrix}4 & 3 & 2 & 3\\ 3 & 7 & 5 & 2\\ 12 & 2 & 7 & 8\\ 1 & 2 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

и

$$S=\begin{bmatrix}5 & 3 & 3 & 4\\ 4 & 6 & 6 & 3\\ 11 & 3 & 6 & 9\\ 2 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Табела потражње за два мјесеца се добије сабирањем одговарајућих података из табела за август и септембар:

Врста возила	Бања Лука	Приједор	Бијељина	Требиње
Са 2 сједишта	9	6	5	7
Са 4 сједишта	7	13	11	5
Са 6 сједишта	23	5	13	17
Лимузина	3	3	2	2

Матрица која одговара горњој табели је збир матрица A и S. Дакле,

$$A+S=\begin{bmatrix}9 & 6 & 5 & 7\\ 7 & 13 & 11 & 5\\ 23 & 5 & 13 & 17\\ 3 & 3 & 2 & 2\end{bmatrix}.$$

У општем случају, двије или више матрица можемо сабрати ако имају исти ред. Сабирамо их тако што саберемо њихове елементе који се налазе на одговарајућим позицијама.
Слично, двије или више матрица истог реда одузимамо тако што одузмемо њихове елементе на одговарајућим позицијама.

Примјер 37

Одредити параметре a, b и c тако да је $A - B = C$, ако је

$$A = \begin{bmatrix} 2a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & c \\ a & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Имамо да је

$$A - B = \begin{bmatrix} 2a & 1-c \\ -a & b+1 \end{bmatrix}.$$

Изједначавањем елемената на одговарајућим позицијама у матрицама $A - B$ и C, добијамо да је $a = 1$, $b = 1$ и $c = 0$.

На основу особина комутативности и асоцијативности сабирања реалних бројева, лако се показује да вриједи сљедећа теорема.

Теорема 2.1

За матрице $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}$ вриједи да је:

$$A + B = B + A,$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C,$$

$$O + A = A + O = A,$$

гдје је са O означена нула-матрица реда $m \times n$.

Примјер 38

У овом примјеру ћемо ријешити матричну једначину:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Имамо:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Множење матрице скаларом. Матрица A се множи са скаларом k тако што се сваки елемент матрице помножи са k. Пишемо:

$$kA = k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}.$$

Примјер 39

Ако су дате матрице A и B:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

одредићемо матрице $4A$, $\frac{1}{3}B$ и $2A - B$.
Имамо да је:

$$4A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 12 \\ -8 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \frac{1}{3}B = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix},$$

$$2A - B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & \frac{17}{3} \\ -4 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Примјер 40

Ако се вратимо на примјер о потражњи аутомобила, матрица која представља удвостручену потражњу за август изгледа овако:

$$2\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 2 \\ 12 & 2 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 & 6 \\ 6 & 14 & 10 & 4 \\ 24 & 4 & 14 & 18 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Дефиниција 2.4

Матрицу $-A = (-1)A$ називамо супротна матрица матрице A.

Теорема 2.2

Нека је $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Вриједи да је:

$$1 \cdot A = A,$$

$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A,$$

$$0 \cdot A = O,$$

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta B,$$

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \beta B.$$

МНОЖЕЊЕ МАТРИЦА

Дефиниција 2.5

Нека је $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}$ и $B = [b_{jk}] \in \mathcal{M}_{n\times p}$. Производ матрица A и B је матрица $AB \in \mathcal{M}_{m\times p}$, дефинисана са:

$$AB = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right].$$

Дакле, можемо помножити матрице ако је број колона матрице са лијеве стране једнак броју врста матрице са десне стране производа.

Примјер 41

Нека су дате матрице $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Производ AB постоји јер је број колона матрице A једнак броју врста матрице B. Помножићемо матрице на сљедећи начин:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0\cdot 2 + (-2)\cdot 0 + 6\cdot 1 & 0\cdot 1 + (-2)\cdot(-1) + 6\cdot 3 & 0\cdot\frac{1}{3} + (-2)\cdot 2 + 6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\ -4\cdot 2 + 2\cdot 0 + (-1)\cdot 1 & -4\cdot 1 + 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 3 & -4\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot 2 + (-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 20 & -7 \\ -9 & -9 & \frac{19}{6} \end{bmatrix}.$$

С друге стране, производ BA не постоји јер је број колона матрице B различит од броја врста матрице A.

Примјер 42

У примјеру с почетка поглавља, податке ћемо представити матрицом (вектор-врстом) чије су колоне врсте аутомобила, док се цијене изнајмљивања налазе у врсти:

$$\begin{bmatrix} 139 & 160 & 340 & 430 \end{bmatrix}.$$

Зараду фирме у наредној седмици добијамо множењем матрица (вектора):

$$\begin{bmatrix} 139 & 160 & 340 & 430 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix} = 5546.$$

Примјер 43

Одредићемо параметре $a, b \in \mathbb{R}$, такве да је:

$$\begin{bmatrix} a & b & b \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

Множењем матрица на лијевој страни, добијамо:

$$\begin{bmatrix} a+b+2b & 2a+b+b \\ 1+1+4 & 2+1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+3b & 2a+2b \\ 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

Изједначавањем елемената на лијевој и на десној страни, добијамо сљедећи систем једначина:

$$\begin{cases} a + 3b = -1 \\ 2a + 2b = 2. \end{cases}$$

Из прве једначине добијамо да је

$$a = -1 - 3b. \tag{2.1}$$

Замјеном у другу једначину система, имамо сљедеће:

$$2(-1 - 3b) + 2b = 2,$$

односно

$$-2 - 6b + 2b = 2,$$

одакле слиједи да је

$$-4b = 4 \implies b = -1.$$

На крају ћемо замијенити $b = -1$ у једначини (2.1). Добијамо да је $a = 2$.

Теорема 2.3

Нека је $\alpha \in \mathbb{R}$, $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}$ и O нула матрица. Вриједи да је:

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B),$$

$$(AB)C = A(BC),$$

$$AO_{n\times p} = O_{m\times p}, \quad O_{q\times m}A = O_{q\times n},$$

$$I_m A = A, \quad AI_n = A,$$

$$A(B + C) = AB + AC,$$

$$(A+B)C = AC + BC.$$

Са A^2, A^3,..., A^n ћемо означавати производе $AA, AAA, \dots, \underbrace{AA\dots A}_{n\text{-пута}}$, редом.

Примјер 44

Нека је

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

и $P(x) = 2x^2 - 4x + 1$. $P(A)$ рачунамо на сљедећи начин:

$$\begin{aligned} P(A) = 2A^2 - 4A + I_2 &= 2\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 2\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

ТРАНСПОНОВАЊЕ МАТРИЦА

Дефиниција 2.6

Нека је $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Матрицу $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times m}$ називамо транспонована матрица матрице A и означавамо са $B = A^T$, ако је

$b_{ij} = a_{ji}$ за све $i = 1, \ldots n$, $j = 1, \ldots, m$.

Примјер 45

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Теорема 2.4

Нека је $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, и $\alpha \in \mathbb{R}$. Вриједи да је:

$$(A^T)^T = A,$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T,$$

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T,$$

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Дефиниција 2.7

Матрицу A називамо симетричном ако је $A = A^T$.

ИНВЕРЗНА МАТРИЦА

Дефиниција 2.8

Нека су A и B квадратне матрице реда n. За матрицу B кажемо да је инверзна матрица матрице A, ако је:

$$AB = BA = I_n.$$

Инверзну матрицу матрице A означавамо са A^{-1}.
Матрицу која има инверзну матрицу називамо инвертибилна матрица.

Примјер 46

Нека је матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Њена инверзна матрица је:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

То ћемо провјерити тако што ћемо помножити матрице A и B:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Такође, $BA = I_n$.

Теорема 2.5

1. Ако је A инвертибилна матрица, онда је A^{-1} такође инвертибилна матрица, и вриједи да је $(A^{-1})^{-1} = A$.

2. Ако су A и B инвертибилне матрице, онда је AB инвертибил-

на матрица, и вриједи да је $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3. Ако је A инвертибилна матрица, онда је $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

2.2.1 Задаци за вјежбање

1. Наћи вриједности промјенљивих x, y и z тако да вриједи сљедећа једнакост:

$$\begin{bmatrix} x & 5 & 2y \\ 7 & -3z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 18 \\ 7 & -6 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Ријешити сљедећу матричну једначину:

$$3A + X = 2B,$$

при чему је $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$.

3. Нека је $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Наћи матрицу B, чије су колоне вектори различити од нула-вектора, тако да је $AB = O$.

4. Помножити сљедеће матрице: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, и $B = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$.

5. Одредити параметре a и b тако да је сљедећа матрица симетрична:

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1+b \\ 1 & a & 1 \\ 1-b^2 & 1 & a \end{bmatrix}.$$

6. Ако је $\frac{1}{a}\begin{bmatrix} -7 & 6 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$ инверзна матрица матрице $\begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -4 & -7 \end{bmatrix}$, наћи параметар a.

2.2.2 Скаларни производ вектора

За два вектора $a, b \in \mathcal{M}_{m\times 1}$, скаларни производ, $a \cdot b$, се дефинише као:

$$a \cdot b = a^T b = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_m b_m.$$

Примјер 47

Ако су дати вектори $a = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ и $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, онда је њихов скаларни производ једнак

$$a \cdot b = 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 + 0 \cdot (-2) = -2.$$

Примјер 48

Једно предузеће производи ручне сатове, будилнике и зидне сатове. Нека је $k = \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \\ 10 \end{bmatrix}$ вектор продатих количина у јануару, $c = \begin{bmatrix} 120 \\ 50 \\ 150 \end{bmatrix}$ вектор цијена, и $t = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 25 \end{bmatrix}$ вектор трошкова по комаду.

Скаларни производ $k \cdot c = 9000$ представља укупни приход предузећа, $k \cdot t = 1550$ представља укупне трошкове предузећа, док $k \cdot (c - t) = 7450$ представља укупну добит предузећа у јануару.

Теорема 2.6

За векторе a, b и c вриједи:

1. $a \cdot b = b \cdot a$;
2. $(\lambda a) \cdot b = \lambda(a \cdot b)$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
3. $(a + c) \cdot b = a \cdot b + c \cdot b$;
4. $a \cdot a \geq 0$ и $a \cdot a = 0 \iff a = 0$.

2.2.3 Задаци за вјежбање

1. Нека су дати вектори $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ и $c = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Наћи $a \cdot b \cdot c$.

2. Једна продавница се бави продајом позивница, декорација и папирних тањира. Када продавница купује своје производе, плаћа $0,25$ КМ за пакет позивница, $0,50$ КМ за једну декорацију, и $0,20$ КМ за пакет тањира. Продавница продаје позивнице за $2,50$ КМ по пакету, декорације за $4,50$ КМ по комаду и тањире за $1,25$ КМ по пакету. У мају је продавница продала 1258 пакета позивница, 2426 декорација и 1354 пакета тањира. Помоћу скаларног производа вектора, израчунати колики је профит продавнице у мају.

3. Особа A је купила 3 kg трешања, 4 kg крушака, 3 kg наранџи и 5 kg јабука. Особа B је купила 2 kg трешања, 2 kg наранџи, 4 kg јабука и није купила крушке. Нека 1 kg трешања кошта 3.75 КМ, крушака 2.60 КМ, наранџи 2.50 КМ и јабука 2.40 КМ. Наћи вектор заједничке потрошње особа A и B.

2.3 Детерминанте

Ако је матрица квадратна, онда можемо израчунати њену детерминанту.

Дефиниција 2.9

Детерминанта матрице

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

једнака је

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Примјер 49

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2(-1) = 4 + 2 = 6.$$

Дефиниција 2.10

Нека је $A = [a_{ij}]$ квадратна матрица реда n. Детерминанту матрице која се добије када из матрице A уклонимо i-ту врсту и j-ту колону, називамо минор матрице A и означавамо са M_{ij}.
Производ $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ називамо кофактор елемента a_{ij}.

Матрицу

$$cof(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

називамо матрица кофактора.

Примјер 50

У матрици

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1, M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4, M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2, M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -8, M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3, M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5, M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 1, \ A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = 4,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = 5, \ A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -2,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = -8, \ A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -3,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = 3, A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = 5,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = M_{33} = 1.$$

Матрица кофактора је:

$$cof(A) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -2 & -8 & -3 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Дефиниција 2.11

Транспоновану матрицу кофактора називамо адјунгована матрица:

$$adj(A) = (cof(A))^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Примјер 51

Адјунгована матрица матрице из претходног примјера је:

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -8 & 5 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Дефиниција 2.12

Нека је $A = [a_{ij}]$ квадратна матрица реда n. Детерминанту матрице A, помоћу кофактора, рачунамо на сљедећи начин:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \text{ (развој по } j\text{-тој колони)},$$

или

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \text{ (развој по } i\text{-тој врсти)}.$$

Примјер 52

Израчунаћемо детерминанту матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

развојем по трећој врсти и по трећој колони. Изабрали смо трећу врсту и колону зато што садрже нулу. Кофактори елемената у трећој врсти су:

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5,$$

и

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1.$$

Имамо да је:

$$\det(A) = 4(3) + (-1)(5) + 0(1) = 7.$$

Слично, ако развијамо матрицу по трећој колони, налазимо да су кофактори сљедећи:

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 8 = 5,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 + 4) = -3,$$

и

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1.$$

Наравно, детерминанта је:

$$\det(A) = 2(5) + (1)(-3) + 0(1) = 7.$$

2.3.1 Особине детерминанти

1. Ако су сви елементи у једној врсти (колони) квадратне матрице A једнаки нули, онда је детерминанта $\det(A)$ једнака нули.

Примјер 53

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot 2 - 0(-1) = 0.$$

2. Детерминанта јединичне матрице је једнака 1.

Примјер 54

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(1) - 0(0) = 1.$$

3. $\det(A) = \det(A^T)$.

Примјер 55

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2) - 1(-1) = 5, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2) - 1(-1) = 5.$$

4. Ако замијенимо двије врсте (колоне) детерминанте, знак детерминанте се мијења.

Примјер 56

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2) - 1(-1) = 5, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1(-1) - 2(2) = -5.$$

5. Детерминанта се множи са бројем тако што се елементи једне врсте (колоне) помноже са тим бројем. Односно, ако је A квадратна матрица реда n и $k \in \mathbb{R}$, онда је $\det(kA) = k^n \det(A)$.

Примјер 57

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4(2) - 1(-2) = 10 = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

6. Ако су двије врсте (колоне) детерминанте једнаке, детерминанта је једнака нули.

Примјер 58

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1) - 2(-1) = 0.$$

7. Ако су A и B квадратне матрице реда n, онда је

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Примјер 59

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 7 \end{bmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4, \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = 20.$$

8. Детерминанта дијагоналне матрице, као и горње (доње) троугаоне матрице једнака је производу елемената на главној дијагонали матрице.

Примјер 60

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 0 = 4.$$

9. Ако се матрица B добија из матрице A тако да се једној врсти (колони) матрице A дода друга врста (колона) претходно помножена са $k \neq 0$, онда је
$$\det(B) = \det(A).$$

2.3.2 Примјена детерминанти

Теорема 2.7

Сљедећа два услова су еквивалентна:

1. Матрица A је инвертибилна,
2. $\det(A) \neq 0$.

Теорема 2.8

Нека је A инвертибилна матрица. Вриједи да је:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A).$$

Примјер 61

Наћи ћемо инверзну матрицу матрице:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}.$$

Најприје рачунамо детерминанту:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = -14 + 12 = -2.$$

Значи, A је инвертибилна матрица јер је њена детерминанта различита од нуле. Можемо рачунати адјунговану матрицу:

$$adj(A) = \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

На крају, инверзну матрицу матрице A рачунамо као:

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Примјер 62

Инверзна матрица дијагоналне матрице:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

једнака је:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

2.3.3 Задаци за вјежбање

1. Показати да је:
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & h & e \\ a & g & d \\ c & i & f \end{vmatrix}.$$

2. Одредити непознату x за коју вриједи
$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ x & x-2 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

3. Наћи вриједност детерминанте:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

4. Наћи вриједност детерминанте:
$$\begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix}.$$

5. Показати да је

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ac + 2d.$$

6. Наћи вриједност детерминанте:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x & -y & z \\ x & y & -z \end{vmatrix}.$$

7. Нека су $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 16 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Ако вриједи $XA = B$, израчунати $\det(X)$.

8. Испитати да ли су матрице инвертибилне:
(а) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; (б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; (в) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

9. Израчунати $KL^{-1}M^{-1}$, ако је

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}, \ L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.4 Линеарна независност вектора

Дефиниција 2.13

Линеарна комбинација вектора $a_1,\ a_2, \dots a_n$ је вектор облика

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots \alpha_n a_n,$$

при чему су $\alpha_1,\ \alpha_2, \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Дефиниција 2.14

За n вектора $a_1, a_2, \dots a_n$ кажемо да су линеарно независни ако вриједи:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = O \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0,$$

гдје O означава нула-вектор.
У супротном кажемо да су вектори линеарно зависни.

Примјер 63

Испитаћемо линеарну зависност вектора:

$$v_1 = (0, 1, -1), v_2 = (0, -1, 2), v_3 = (1, 1, 2).$$

Направимо линеарну комбинацију ова три вектора, и изједначимо је са нула-вектором:

$$\alpha_1(0, 1, -1) + \alpha_2(0, -1, 2) + \alpha_3(1, 1, 2) = (0, 0, 0).$$

Одавде добијамо да је:

$$(\alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3) = (0, 0, 0).$$

Изједначавањем ова два вектора, добијамо систем:

$$\begin{cases} \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Рјешење система је уређена тројка $(0,0,0)$. Ово значи да су дати вектори линеарно независни.

Примјер 64

Нека су дати вектори:

$$v_1 = (3,2,-1),\ v_2 = (4,5,0),\ v_3 = (-1,3,-1),\ v_4 = (-8,4,1).$$

Приказаћемо вектор v_4 као линеарну комбинацију преосталих вектора. Ставимо да је:

$$(-8,4,1) = \alpha_1(3,2,-1) + \alpha_2(4,5,0) + \alpha_3(-1,3,-1).$$

Изједначавањем лијеве и десне стране једнакости, добијамо:

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3 = -8 \\ 2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3 = 4 \\ -\alpha_1 \qquad\quad - \alpha_3 = 1. \end{cases}$$

Рјешење система је $\left(\frac{73}{24}, \frac{19}{24}, \frac{49}{24}\right)$.
Значи, вектор v_4 можемо написати у облику:

$$v_4 = \frac{-73}{24}v_1 + \frac{19}{24}v_2 + \frac{49}{24}v_3,$$

односно, постоји нетривијална линеарна комбинација вектора v_1, v_2, v_3 и v_4 једнака нула-вектору:

$$\frac{-73}{24}v_1 + \frac{19}{24}v_2 + \frac{49}{24}v_3 - v_4 = O.$$

Теорема 2.9

Нека су $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ и $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ дате матрице. Колоне матрице A су линеарно независне ако и само ако из $AX = O$ слиједи да је $X = O$.

Доказ. Нека је $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ и $X = [x_i]_{n\times 1}$; $i = 1, 2 \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$. Изједначимо линеарну комбинацију колона матрице A са нула вектором. Имамо:

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

У матричној форми ова једнакост се може представити као $AX = O$.
Ако су колоне линеарно независне, онда слиједи да је
$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, односно $X = 0$.
Обрнуто, ако из $AX = O$ слиједи да је $X = O$, то значи да су колоне матрице A линеарно независне. □

Теорема 2.10

Нека је A квадратна матрица реда n. Сљедећа тврђења су еквивалентна:

1. A је инвертибилна матрица.

2. Колоне матрице A су линеарно независне.

3. Врсте матрице A су линеарно независне.

Доказ. Теорема се лако доказује на основу Теореме 2.9, једнакости $\det(A) = \det(A^T)$, и чињенице да су врсте матрице A уједно и колоне матрице A^T. $\square$

2.4.1 Задаци за вјежбање

1. Написати вектор v_4 као линеарну комбинацију вектора v_1, v_2 и v_3, ако су:
   (а) $v_1 = (1, -2, 0)$, $v_2 = (3, -2, 1)$, $v_3 = (-1, -1, -1)$, $v_4 = (-3, -1, -2)$;
   (б) $v_1 = (3, 2, -1)$, $v_2 = (4, 5, 0)$, $v_3 = (-1, 3, -1)$, $v_4 = (-8, -4, -2)$.
2. Испитати линеарну независност вектора:
   (а) $v_1 = (1, -1, 2),\ v_2 = (4, 2, 0),\ v_3 = (1, 1, 1)$;
   (б) $v_1 = (1, 2, 1),\ v_2 = (0, 1, 1),\ v_3 = (1, 4, 3)$;
   (в) $v_1 = (-1, 0, -1, -1),\ v_2 = (2, 1, 1, 2),\ v_3 = (3, 0, 0, 1)$.
3. Одредити параметар $t \in \mathbb{R}$ такав да сљедећи вектори буду линеарно независни:
   (а) $v_1 = (1, -1, 2),\ v_2 = (0, t, 1),\ v_3 = (1, 1, t)$;
   (б) $v_1 = (1, t, -1),\ v_2 = (2, 1, -2)$;
   (в) $v_1 = (t, 5, 1, 0),\ v_2 = (2, 0, 6, -10),\ v_3 = (4, 3, 0, 1), v_4 = (0, 1, -4, 7)$.

2.5 Ранг матрице

Дефиниција 2.15

Максималан број линеарно независних колона у некој матрици A, називамо ранг матрице и означавамо са $r(A)$.

Примјер 65

Ранг квадратне матрице реда 2:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

једнак је:

1. $r(A) = 2$ ако је $\det(A) = ad - bc \neq 0$, јер су, на основу Теореме 2.9, колоне матрице независне у овом случају.
2. $r(A) = 1$ ако је $\det(A) = 0$ и $A \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, јер су у овом случају колоне линеарно зависне или је једна колона нула вектор.
3. $r(A) = 0$ ако је $A = O$.

Да бисмо одредили ранг неке матрице, користимо елементарне трансформације на матрици. Заправо, ранг матрице је једнак броју водећих коефицијената у редукованој матрици. Колоне које садрже водеће коефицијенте су линеарно независне. Ранг неке матрице реда $m \times n$ је увијек мањи или једнак од n и од m.

Примјер 66

Дата је матрица:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & -3 & -4 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ a & b & 6 & -2 \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{R}.$$

Испитаћемо за које је вриједности параметара a и b ранг матрице једнак 2. Примјеном елементарних трансформација на овој матрици, имамо:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & -3 & -4 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ a & b & 6 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -3 & -4 \\ a & b & 6 & -2 \end{bmatrix} \to$$
$$\to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & b-3a & 6-a & 2a-2 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b-3a & 6-a & 2a-2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b-3a & 0 & 2a-2 \end{bmatrix}.$$

Одавде закључујемо да је ранг полазне матрице једнак 2 ако параметри a и b задовољавају сљедећи систем једначина:

$$\begin{cases} b - 3a = 0 \\ 2a - 2 = 0. \end{cases}$$

Дакле, за $a = 1$ и $b = 3$, ранг матрице једнак је 2.

Примјер 67

Нека је дата матрица

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Множењем прве врсте са -2, -3, -5, и затим додавањем другој, трећој и четвртој врсти, редом, имамо:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & -6 & 9 \\ 0 & -7 & -7 & 15 \\ 0 & -10 & -13 & 24 \end{bmatrix}.$$

Дијељењем друге врсте са -3, имамо:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & -6 & 9 \\ 0 & -7 & -7 & 15 \\ 0 & -10 & -13 & 24 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -7 & -7 & 15 \\ 0 & -10 & -13 & 24 \end{bmatrix}.$$

Множењем друге врсте са 7, 10, и додавањем трећој и четвртој врсти, редом, добијамо:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -7 & -7 & 15 \\ 0 & -10 & -13 & 24 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 7 & -6 \end{bmatrix}.$$

На крају, одузимањем четврте врсте од треће, имамо:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 7 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

У добијеној редукованој матрици имамо три водећа коефицијента, што значи да је ранг полазне матрице једнак 3.

Теорема 2.11

(1) Детерминанта матрице је једнака нули ако и само ако је ранг матрице мањи од броја њених колона.
(2) Ранг матрице је једнак реду највећем реду минора матрице различитог од нуле.

Доказ.
(1) Нека је матрица $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ и нека је $\det(A) = 0$. На основу Теореме 2.7, закључујемо да A није инвертибилна. Даље, на основу Теореме 2.10, слиједи да су колоне матрице A линеарно зависне. Ово значи да је $r(A) < n$, на основу Дефиниције 2.15.
Слично показујемо да из $r(A) < n$ слиједи $\det(A) = 0$.
(2) Слиједи из Теореме 2.7, Теореме 2.10 и Дефиниције 2.15. $\square$

Примјер 68

Израчунаћемо миноре реда 3 у матрици $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 9 & 5 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 9 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 7(-1) - 1(-7) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 9 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1(18) - 2(22) - 1(-26) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1(4) + 4(-1) = 0.$$

Значи да је $r(A) < 3$. Сада тражимо минор мањег реда који је различит од нуле. Први такав минор је $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} = -13$. Ово је довољно да закључимо да је $r(A) = 2$.

Примјер 69

У матрици $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, највећи ред минора различитих од нула је 3. Узмимо минор $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$. Значи да је ранг матрице једнак 3.

Ранг матрице можемо искористити код испитивања линеарне независности вектора.

Примјер 70

Показаћемо да су вектори $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ и $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ линеарно независни. Ставићемо дате векторе у колоне матрице:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

и наћи ћемо њен ранг. Пошто је $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$, имамо да је $r(A) = 2$. Значи, v_1 и v_2 су линеарно независни.

2.5.1 Задаци за вјежбање

1. Наћи ранг сљедећих матрица:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -7 & 3 \\ 1 & 9 & -6 & 4 \\ 1 & 3 & -8 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Одредити параметар t такав да матрица A има ранг 3, ако је:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ t & 1 & -2 \\ t & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Одредити параметар a тако да матрица

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a+1 & a+2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

има минималан ранг.

4. Помоћу ранга испитати линеарну независност вектора:

$$\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix}.$$

3 МАТРИЦЕ У СИСТЕМИМА ЈЕДНАЧИНА

3.1 Матричне једначине облика $AX = B$ или $XA = B$

У овом дијелу ћемо објаснити поступак рјешавања матричне једначине облика $AX = B$, гдје је $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ инвертибилна матрица, $X \in \mathcal{M}_{n\times m}$ и $B \in \mathcal{M}_{n\times m}$. У овом случају непозната је матрица X и да бисмо је нашли потребно је да једначину помножимо слијева са A^{-1}. Имамо сљедеће:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B.$$

Због особине асоцијативности множења матрица, добијамо да је:

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B,$$

односно:

$$I_nX = A^{-1}B.$$

Значи,

$$X = A^{-1}B.$$

Ако имамо матричну једначину облика $XA = B$, онда ћемо непознату матрицу наћи множењем једначине здесна са A^{-1}. У овом случају рјешење је облика: $X = BA^{-1}$.

Примјер 71

Ријешићемо матричну једначину:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Најприје ћемо израчунати инверзну матрицу матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Добијамо да је:

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Рјешење система је вектор

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3.1.1 Задаци за вјежбање

Ријешити матричне једначине:

1. $AX = B$, при чему је $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} -8 & -13 & 1 \\ 32 & -17 & 21 \end{bmatrix}$.

2. $AX = b$, при чему је $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ и $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$.

3. $XA = B$, при чему је $A = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$.

4. $2XA + 3X = B$, гдје је $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

5. $AXB = C$, гдје је $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$,

   $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

3.2 Матрична репрезентација система једначина

Систем

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

можемо написати у матричном облику $AX = B$, гдје је

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Матрицу A називамо матрица система, док матрицу

$$(A|B) = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

називамо проширена матрица система.

Примјер 72

Систем линеарних једначина који одговара проширеној матрици:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

је

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 4. \end{cases}$$

Сљедећа теорема, позната као Кронекер-Капелијева, нам омогућава да испитамо сагласност система помоћу ранга горе дефинисаних матрица.

Теорема 3.1

Систем линеарних једначина $AX = B$ има рјешење ако и само ако је $r(A) = r(A|B)$.

Доказ. Нека $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $B \in \mathcal{M}_{m\times 1}$, и нека је вектор $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ рјешење система $AX = B$. Дакле, $A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = B$, што је еквивалентно са тим да се вектор B може написати као линеарна комбинација вектор-колона матрице A: $c_1, c_2, \ldots, c_n$, односно

$$\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \ldots + \alpha_n c_n = B.$$

Ово значи да су вектори-колоне $c_1, c_2, \ldots, c_n, B$ линеарно зависне, што је еквивалентно са $r(A) = r(A|B)$, на основу дефиниције ранга. $\square$

Примјер 73

Посматрајмо систем:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 12. \end{cases}$$

Матрицу система ћемо свести на редуковани облик:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Закључујемо да је $r(A) = 2$.
Сада ћемо наћи ранг проширене матрице система:

$$(A|B) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 12 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right].$$

Дакле, $r(A|B) = 3$. На основу Кронекер-Капелијеве теореме, закључујемо да дати систем нема рјешења.

Примјер 74

Испитаћемо за које вриједности параметра $t \in \mathbb{R}$ сљедећи систем има рјешење:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \quad = t \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = t - 1 \\ -x_1 \quad + 3x_3 = t + 1. \end{cases}$$

Наћи ћемо ранг (проширене) матрице система:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & t \\ -2 & 1 & 2 & t-1 \\ -1 & 0 & 3 & t+1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & t \\ 0 & -1 & 2 & 3t-1 \\ 0 & -1 & 3 & 2t+1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & t \\ 0 & -1 & 2 & 3t-1 \\ 0 & 0 & 1 & -t+2 \end{array}\right].$$

Видимо да је $r(A) = r(A|B) = 3$, што значи да систем има рјешење за свако $t \in \mathbb{R}$.

Теорема 3.2

Нека систем $AX = B$, $X \in \mathbb{R}^n$, има рјешење. Тада вриједи:

1. Ако је $r(A) < n$, онда систем има бесконачно много рјешења.
2. Ако је $r(A) = n$, онда систем има јединствено рјешење.

Примјер 75

Рјешавамо систем:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ \qquad x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 8. \end{cases}$$

Проширена матрица овога система је:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ -1 & 5 & -4 & 8 \end{array}\right].$$

Циљ нам је да систем (матрицу) сведемо на редуковану. Да бисмо то постигли, трећу једначину система ћемо помножити са -1, а затим ћемо замијенити мјеста првој и трећој једначини. Имамо:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 4x_3 = -8 \\ \qquad x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -5 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

Сада ћемо прву једначину помножити са -2 и добијену једначину сабрати са трећом:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 4x_3 = -8 \\ \qquad x_2 + x_3 = 6 \\ \quad 13x_2 - 9x_3 = 18 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -5 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 13 & -9 & 18 \end{array}\right].$$

Множењем друге једначине са -13 и сабирањем добијене једначине са трећом добијамо:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 4x_3 = -8 \\ \quad x_2 + x_3 = 6 \\ \quad -22x_3 = -60 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -22 & -60 \end{array}\right].$$

Дијелимо трећу једначину са -22 да бисмо добили коефицијент уз промјенљиву x_3 једнак 1:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 4x_3 = -8 \\ \quad x_2 + x_3 = 6 \\ \quad x_3 = \frac{30}{11} \end{cases} \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{30}{11} \end{array}\right].$$

Даље, множимо трећу једначину са -1 и добијену једначину сабирамо са другом. То радимо да бисмо добили коефицијент уз x_3 једнак 0 у другој једначини. Имамо:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 4x_3 = -8 \\ \quad x_2 = \frac{36}{11} \\ \quad x_3 = \frac{30}{11} \end{cases} \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{36}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{30}{11} \end{array}\right].$$

У задњем кораку ћемо помножити другу једначину са 5, и трећу једначину са -4, и добијене једначине сабрати са првом. Добијамо:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{28}{11} \\ \quad x_2 = \frac{36}{11} \\ \quad x_3 = \frac{30}{11} \end{cases} \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{28}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{36}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{30}{11} \end{array}\right].$$

У овом примјеру смо видјели примјену елементарних трансформација на систему једначина (матрици) у циљу добијања рјешења система.

Примјер 76

Ријешићемо систем једначина:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 = -1 \\ x_1 \qquad\quad + 10x_3 = 5 \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 1. \end{cases}$$

Проширена матрица система је:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 10 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 1 \end{array}\right].$$

Да бисмо добили 1 на мјесту $(1,1)$, замијенићемо мјеста првој и другој врсти:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 10 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & -1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 \end{array}\right].$$

Сада ћемо прву врсту помножену са -3 сабрати са другом врстом, и прву врсту помножену са -4 сабрати са трећом врстом:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & -34 & -16 \\ 0 & 1 & -34 & -19 \end{array}\right].$$

Одузећемо трећу врсту од друге. Добијамо:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & -34 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right].$$

Пошто је ранг матрице система различит од ранга проширене матрице, закључујемо да систем нема рјешења.

Теорема 3.3

Ако је матрица A квадратног система линеарних једначина инвертибилна, онда систем има јединствено рјешење.

Доказ. Пошто је матрица A инвертибилна, постоји њена инверзна матрица A^{-1}. У том случају квадратни систем $AX = B$ рјешавамо множењем једначине са A^{-1}, и добијамо да је јединствено рјешење система $X = A^{-1}B$. $\square$

На основу ове теореме и Теореме 2.7 могли смо у претходном примјеру показати несагласност система рачунањем детерминанте матрице система. Сматрамо да је у случају квадратних система практичније испитати сагласност помоћу детерминанте, а затим сагласни систем рјешавати помоћу елементарних трансформација.

Примјер 77

Посматрајмо систем:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 \quad\;\; = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$$

Проширена матрица овог система је:

$$(A|B) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right].$$

Помножићемо прву врсту са -2, и добијену врсту сабрати са другом врстом, а с друге стране ћемо одузети трећу врсту од прве.

Резултат је:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 \end{array}\right].$$

Након одузимања треће врсте од друге, и множења друге врсте са $\frac{1}{3}$, добијамо:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Видимо да је $r(A) = r(A|B) = 2 < 4$. Дакле, на основу Теореме 3.1 и Теореме 3.2, систем има бесконачно много рјешења. Систем који одговара редукованој матрици је:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ \qquad\qquad\quad x_3 - 2x_4 = 1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0. \end{cases}$$

Пошто имамо двије једначине и четири непознате,можемо узети да су двије непознате произвољни параметри. Нека је $x_2 = t$, $x_4 = s$. Дакле, рјешење система је:

$$(2 + 2t - s, t, 1 + 2s, s), \; s, t \in \mathbb{R}.$$

3.2.1 Задаци за вјежбање

1. Написати систем једначина у матричној форми:

$$\begin{cases} x + 2z = 6 \\ x + 2y + 5z = 0 \\ x + 5y - z = 2. \end{cases}$$

2. Написати проширену матрицу система:

$$\begin{cases} 5x - 3y = -1 \\ y = 2x - 2. \end{cases}$$

3. Испитати сагласност датих система и наћи рјешења у случају сагласности:

   (а)
   $$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ \quad 2y + 5z = -4 \\ 2x + 5y - z = 27. \end{cases}$$

   (б)
   $$\begin{cases} \quad x + y - z = -2 \\ 2x - 3y + 2z = \ 1 \\ 3x - 2y + z = -1. \end{cases}$$

   (в)
   $$\begin{cases} \quad x + 2y - z = 4 \\ 2x - 3y + 2z = 6. \end{cases}$$

   (г)
   $$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ 3x + y - z = 4 \\ 4x + 3y - 2z = 7. \end{cases}$$

4. На основу Кронекер-Капелијеве теореме испитати да ли сљедећи систем има рјешење:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 \qquad + 2x_3 = 2 \\ \qquad 6x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$$

5. Одредити параметар $t \in \mathbb{R}$ такав да сљедећи систем има рјешење:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + tx_3 = t \\ 2x_1 \qquad + tx_3 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 \qquad = t - 2. \end{cases}$$

3.3 Хомогени системи

Сада ћемо посматрати хомогене системе и услове под којима они имају нетривијално рјешење.

Теорема 3.4

Нека је A квадратна матрица неког хомогеног система. Вриједи:
(1) Систем има јединствено рјешење (тривијално) ако је $\det(A) \neq 0$.
(2) Систем има бесконачно много рјешења ако је $\det(A) = 0$.

Теорема 3.5

Ако хомогени систем линеарних једначина има више промјенљивих него једначина, онда он има бесконачно много рјешења.

Примјер 78

Посматрајмо хомогени систем:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Трансформисаћемо проширену матрицу система:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Помножену прву врсту са -2 ћемо сабрати са другом, и помножену прву врсту са -3 ћемо сабрати са трећом:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right].$$

Сада ћемо одузети трећу врсту од друге:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Помножену трећу врсту са -3 ћемо сабрати са другом, и трећу врсту ћемо сабрати са првом:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

У овом кораку смо и подијелили другу врсту са 4. На крају, сабирамо прву врсту са другом:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Еквивалентни систем који одговара овој матрици је:

$$\begin{cases} x_1 \qquad + x_3 = 0 \\ \quad x_2 - x_3 = 0 \\ \qquad\quad x_4 = 0. \end{cases}$$

Пошто имамо три једначине и четири промјенљиве, можемо ставити да је једна промјенљива произвољна, рецимо $x_3 = t,\ t \in \mathbb{R}$. Закључујемо да је $x_1 = t,\ x_2 = t,\ x_4 = 0$, односно да је рјешење система:

$$(-t, t, t, 0),\ t \in \mathbb{R}.$$

Примјер 79

Детерминанта хомогеног система:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \quad\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 \qquad = 0 \end{cases}$$

је

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

што значи, на основу претходне теореме, да систем има бесконачно много рјешења, и њих записујемо као:

$$(-2t, t, t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Примјер 80

Посматрајмо систем:

$$\begin{cases} x + y - tz = 0 \\ 2x + ty + z = 0 \\ tx + y + z = 0, \end{cases}$$

гдје је $t \in \mathbb{R}$.
Детерминанта матрице система је:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -t \\ 2 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ t & 1 \end{vmatrix} - t \begin{vmatrix} 2 & t \\ t & 1 \end{vmatrix} = t - 1 - 2 + t - 2t + t^3 = t^3 - 3.$$

Систем има само тривијално рјешење ако је $t \neq \sqrt[3]{3}$, и има бесконачно много рјешења ако је $t = \sqrt[3]{3}$.

Примјер 81

Провјерићемо линеарну зависност вектора $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ и $a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Имамо да је

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_3 \\ 3\alpha_2 + 3\alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

С обзиром на то да је детерминанта овог система једнака нули, можемо наћи скаларе $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ од који је бар један различит од нуле, тако да је $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = 0$.
Према томе, вектори су линеарно зависни.

3.3.1 Задаци за вјежбање

1. Наћи рјешење хомогеног система:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \quad\ 6x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 - \ x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

2. Наћи рјешење хомогеног система:

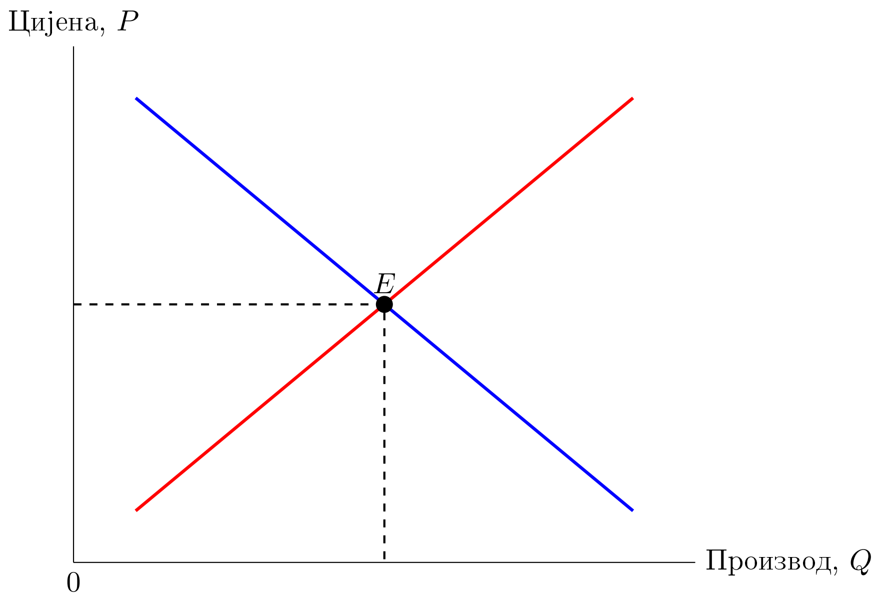
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \quad\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 \quad\ = 0. \end{cases}$$

3. Наћи рјешење једначине $AX = 0$, ако је:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

3.4 Примјена у економији

Еквилибријум или тржишна равнотежа понуде и потражње на конкурентном тржишту настаје код цијене код које су понуда и потражња у равнотежи. Јавља се код цијене код које су количине које се траже једнаке количинама које се нуде. Графички, еквилибријум се налази на пресјеку кривих потражње и понуде, као што можемо видјети на доњој слици, гдје E представља тачку еквилибријума.



Ако је цијена изнад еквилибријума, количине производа које произвођач нуди су веће од количине коју потрошачи желе да купе. У том случају имамо вишак добара, одакле долази до смањења цијене. На исти начин, ако је цијена испод еквилибријума, ствара се несташица производа те ће произвођачи настојати подићи цијену до еквилибријума.

3.4.1 Линеарни тржишни модел

Пошто посматрамо само једну врсту робе, довољно је да имамо само три промјенљиве, и то:

1. цијену робе P,

2. количину продане робе, односно потражње Q_d,

3. количину понуде Q_s.

Претпоставка је да се еквилибријум на тржишту ако и само ако нема вишка потражње. Сада је услов еквилибријума:

$$Q_d = Q_s.$$

За Q_d претпостављамо да је линеарна опадајућа функција цијене (што је већа цијена, то је мања потражња), док за Q_s претпостављамо да је линеарна растућа функција цијене (што је већа цијена, то је већа понуда).
Такође претпостављамо да нема понуде уколико цијена не достигне одређени минимални ниво. Значи, модел садржи један услов еквилибријума и два услова понашања функција потражње и понуде.
Математички модел.

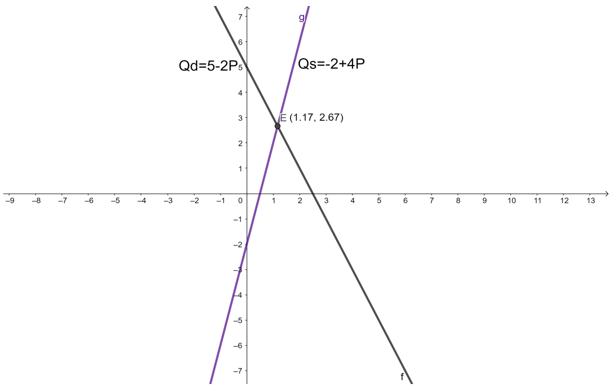
$$\begin{cases} Q_d = Q_s \\ Q_d = a - bP \\ Q_s = -c + dP, \end{cases}$$

гдје су a, b, c, d позитивни бројеви.
Рјешење овога система је тачка еквилибријума $E(\overline{P}, \overline{Q})$, при чему је

$$\overline{P} = \frac{a+c}{b+d},$$

$$\overline{Q} = a - b\overline{P} = a - b\frac{a+c}{b+d} = \frac{ad-bc}{b+d}.$$

На слици испод можемо видјети графике функција потражње и понуде за $a = 5$, $b = 2$, $c = 2$ и $d = 4$.



Примјер 82

Потражња за неким производом дата је једначином $Q = 415 - 22P$, а понуда $Q = 95 + 10P$. Да бисмо нашли количину и цијену тог производа у условима тржишне равнотеже ријешићемо једначину:

$$415 - 22P = 95 + 10P,$$

коју смо добили изједначавањем понуде и потражње (тржишна равнотежа: понуда = потражња).
Рјешавањем једначине, добијамо да је $P = 10$. Уврштавањем цијене у једну од полазних једначина, добијамо да је $Q = 415 - 22 \cdot 10 = 195$. Значи да се тржишна равнотежа постиже за количину производа од 195 (kg, m, комада...) са цијеном од 10 KM.

3.4.2 Општа тржишна равнотежа

Уколико посматрамо n производа, сваки са својом цијеном, понудом и потражњом, равнотежа ће бити успостављена у случају да се испуне услови за сваки производ.
У овом случају модел садржи $3n$ једначина:

$$Q_{d_i} = Q_{d_i}(P_1, P_2, \ldots, P_n),$$

$$Q_{s_i} = Q_{s_i}(P_1, P_2, \ldots, P_n),$$

$$Q_{d_i} = Q_{s_i},$$

при чему $i = 1, 2, \ldots, n$.

Примјер 83

У сљедећем моделу посматрамо двије врсте робе. Наћи ћемо цијене роба које обезбјеђују тржишну равнотежу.

$$Q_{d_1} = 9 - 3P_1 + 2P_2,$$

$$Q_{s_1} = -3 + 4P_1,$$

$$Q_{d_2} = 14 + 2P_1 - 2P_2,$$

$$Q_{s_2} = -2 + P_2.$$

Изједначићемо функције понуде и потражње за обе врсте робе, добијамо да је $Q_{d_1} = Q_{s_1}$ и $Q_{d_2} = Q_{s_2}$. Дакле, имамо систем:

$$\begin{cases} 7P_1 - 2P_2 = 12 \\ 2P_1 - 3P_2 = -16. \end{cases}$$

Рјешавањем система, добијамо да је $P_1 = 4$ и $P_2 = 8$.

3.4.3 Input-output анализа

Леонтијева Input-output анализа се користи за истраживање релација између различитих грана производње, с циљем да се разумије њихова међусобна зависност и да се добију услови за постизање еквилибријума. Ова анализа је од великог значаја за планирање производње, с обзиром на то да је излаз многих индустрија у исто вријеме улаз многих других индустрија. Анализа се заснива на рјешавању линеарних једначина, чији број зависи од броја привредних

сектора. Секторска производња је приказана у двострукој зависности, као низ испорука производа другим секторима и као низ набавки неопходних средстава. Улазне и излазне међусобно повезане ставке формирају облик матрице, која омогућава математичку обраду података.
За боље разумијевање анализе, претпоставимо да имамо три сектора производње (X_1, X_2, X_3) и један сектор финалне потражње (F). Са X_{ij}; $i, j = 1, 2, 3$, означавамо испоруке и набавке међуфазних производа i-тог сектора у репродукционој потрошњи у j-том сектору. Са F_i означавамо компоненту финалне потрошње i-тог сектора. Ове податке уносимо у сљедећу табелу:

Input-output табела				
Output	X_1	X_2	X_3	Потражња
X_1	X_{11}	X_{12}	X_{13}	F_1
X_2	X_{21}	X_{22}	X_{22}	F_2
X_3	X_{31}	X_{32}	X_{33}	F_3

Дакле, структура производње у сваком сектору се приказује сљедећим системом линеарних једначина:

$$\begin{cases} X_{11} + X_{12} + X_{13} + F_1 = X_1 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} + F_2 = X_2 \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} + F_3 = X_3. \end{cases}$$

Технички коефицијент је количник $a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j}$, и он представља константну количину производа из i-тог сектора неопходних за производњу једне јединице у j-том сектору. Квадратну матрицу чији су елементи технички коефицијенти називамо матрица техничких коефицијената A. Разлика јединичне матрице и матрице техничких коефицијената назива се матрица технологије T:

$$T = I - A.$$

Напомињемо да је T увијек инвертибилна матрица за све реалне системе производње.
Дакле, еквилибријум се може представити сљедећим системом линеарних једначина:

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + F_1 = X_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + F_2 = X_2 \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + F_3 = X_3. \end{cases}$$

У матричној форми, претходни систем се може записати као:

$$AX + F = X,$$

при чему је $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$ и $F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$.

Примјер 84

Претпоставимо да је привреда подијељена на три сектора: производњу угља (X_1), производњу електричне енергије (X_2) и производњу челика (X_3). Нека је матрица техничких коефицијената дата са:

$$A = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.5 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

Међузависност ова три сектора се може видјети из матрице A. Тако имамо да је на примјер из треће колоне матрице, output индустрије челика подијељен на сљедећи начин: 60% output-а иде на производњу угља, 20% иде на производњу електричне енергије, док 20% остаје у трећем сектору. Из треће врсте матрице можемо видјети да је за производњу челика потребно 40% од output-а индустрије угља, 50% од output-а индустрије електричне енергије, и 20% од output-а индустрије челика. Ако са X_1, X_2 и X_3 означимо output-е ова три сектора, онда имамо да је за производњу челика потребно $0.4X_1$,

$0.5X_2$ и $0.2X_3$, односно $X_3 = 0.4X_1 + 0.5X_2 + 0.2X_3$. На сличан начин добијамо да је $X_1 = 0.4X_2 + 0.6X_3$ и $X_2 = 0.6X_1 + 0.1X_2 + 0.2X_3$. Дакле, добијамо сљедећи систем једначина:

$$\begin{cases} X_1 - 0.4X_2 - 0.6X_3 = 0 \\ 0.6X_1 - 0.9X_2 + 0.2X_3 = 0 \\ 0.4X_1 + 0.5X_2 - 0.8X_3 = 0. \end{cases}$$

Матрицу овога система редукујемо на сљедећи начин:

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.4 & -0.6 \\ 0.6 & -0.9 & 0.2 \\ 0.4 & 0.5 & -0.8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{31}{33} \\ 0 & 1 & -\frac{28}{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.94 \\ 0 & 1 & -0.85 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ово значи да је $X_1 = 0.94X_3$, $X_2 = 0.85X_3$, $X_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$. Одавде закључујемо да је за постизање тржишне равнотеже потребно да први сектор произведе 94%, и други 85% од укупне производње трећег сектора.

Сада ћемо размотрити три случаја која се могу десити приликом планирања производње.

Случај 1: Ако нам је познат вектор X, односно нови план производње, треба да одредимо вектор F. То ћемо урадити помоћу матричне једначине еквилибријума:

$$F = X - AX = (I - A)X = TX.$$

Примјер 85

Нека је економија подијељена на три сектора и нека је input-output табела дата на сљедећи начин:

Output X_i	X_1	X_2	X_3	F_i
200	20	30	50	100
300	50	110	90	50
400	50	150	140	60

Саставићемо нову input-output табелу која одговара новом плану производње: $X_1 = 350$, $X_2 = 470$, $X_3 = 550$, ако су технолошки услови остали непромијењени.Најприје рачунамо матрицу техничких коефицијената:

$$\begin{bmatrix} 0.100 & 0.100 & 0.125 \\ 0.250 & 0.367 & 0.225 \\ 0.250 & 0.500 & 0.350 \end{bmatrix}.$$

Одавде добијамо да је матрица технологије:

$$\begin{bmatrix} 0.900 & -0.100 & -0.125 \\ -0.250 & 0.633 & -0.225 \\ -0.250 & -0.500 & 0.650 \end{bmatrix}.$$

Сада је

$$F = \begin{bmatrix} 0.900 & -0.100 & -0.125 \\ -0.250 & 0.633 & -0.225 \\ -0.250 & -0.500 & 0.650 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 350 \\ 470 \\ 550 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 199.25 \\ 86.26 \\ 35 \end{bmatrix}.$$

Нова input-output табела је:

Output X_i	X_1	X_2	X_3	F_i
350	35	47	68.75	199.25
470	87.5	172.49	123.75	86.26
550	87.5	235	192.5	35

Случај 2: Ако нам је познат вектор F, требамо одредити вектор X.

То ћемо урадити на сљедећи начин:

$$F = TX \Rightarrow X = T^{-1}F.$$

Примјер 86

Нека је input-output табела двосекторске економије дата са:

Output X_i	X_1	X_2	Потражња F_i
2000	500	1000	500
3000	1000	1000	1000

Одредићемо нову input-output табелу ако се финална потражња првог сектора смањи за 5%, а другог повећа за 5%. Дакле, нови вектор финалне потражње је $F = \begin{bmatrix} 475 \\ 1050 \end{bmatrix}$. Матрица техничких коефицијената и матрица технологије су редом:

$$A = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.33 \\ 0.50 & 0.33 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 0.75 & -0.33 \\ -0.50 & 0.67 \end{bmatrix}.$$

Инверзна матрица матрице технологије је:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 2.00 & 1.00 \\ 1.50 & 2.25 \end{bmatrix}.$$

Ако ову матрицу помножимо са вектором F, добијамо:

$$\begin{bmatrix} 2.00 & 1.00 \\ 1.50 & 2.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 475 \\ 1050 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000 \\ 3075 \end{bmatrix}.$$

Дакле, нова input-output табела је:

Output X_i	X_1	X_2	Потражња F_i
2000	500	1025	475
3075	1000	1025	1050

Случај 3: Овдје су нам познати неки елементи вектора X, и неки елементи вектора F.

Примјер 87

Нека је матрица технологије дата са:

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{16}{25} & \frac{7}{10} \end{bmatrix},$$

укупни output првог сектора $X_1 = 50$ и финална потражња другог сектора $F_2 = 17$.
У овом случају је матрица техничких коефицијената дата са:

$$A = I - T = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{16}{25} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

Затим, из једначине $TX = F$ добијамо систем:

$$\begin{cases} \frac{7}{10} \cdot 50 - \frac{1}{5} X_2 = F_1 \\ -\frac{16}{25} \cdot 50 + \frac{7}{10} X_2 = 17 \end{cases}$$

Рјешење система је: $F_1 = 21$ и $X_2 = 70$. Добијамо да је input-output табела дата са:

Output X_i	X_1	X_2	Потражња F_i
50	15	14	21
70	32	21	17

3.4.4 Задаци за вјежбање

1. Написати input-output табелу ако је:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

2. Ако је инверзна матрица технологије

$$T^{-1} = \frac{5}{6} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

међусекторска производња $X_{12} = 50$ и финална потражња $F_1 = 10$. Саставити припадну input-output табелу.

3. Претпоставимо да је економија једне земље подијељена на 3 сектора и да је одговарајућа input-output табела облика

Output X_i	X_1	X_2	X_3	Потражња F_i
150	30	27	24	69
180	45	36	48	51
160	15	18	16	111

Саставити нову input-output табелу ако се планира да ће се укупна производња у првом и трећем сектору повећати за 20%, а у другом сектору смањити за 10% и ако се при том технолошки услови производње не мијењају.

4. Нека је input-output табела једне двосекторске економије

Output X_i	X_1	X_2	Потражња F_i
*	600	1200	600
*	1200	1200	1200

Прво попунити табелу, а затим одредити нови вектор укупних output података ако се финална потражња првог сектора повећа за 10%, а другог сектора смањи за 10%. Такође, саставити нову input-output табелу, уз претпоставку да се технолошки услови не мијењају.

5. Input-output табела једне економије са три сектора је

Output X_i	X_1	X_2	X_3	Потражња F_i
150	30	27	24	69
180	45	36	48	51
160	15	18	16	111

Ако се планирају нове производње у првом и трећем сектору: $X_1 = 110$ и $X_3 = 280$, а финална потражња другог сектора F_2 да се не мијења као ни технолошки услови производње, саставити нову input-output табелу.

4 ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАЧУН

4.1 Функције једне промјенљиве

Нека су A и B непразни подскупови скупа реалних бројева $\mathbb{R}$.

Дефиниција 4.1

Функција $f : A \to B$ је правило којим се сваком елементу $x \in A$ придружује тачно један елемент $y \in B$. То означавамо са $y = f(x)$. Скуп A називамо домен функције. Скуп свих вриједности $f(x) \in B$ називамо ранг функције. Дакле, ранг је $\{f(x)|x \in A\}$. Промјенљива x се назива независна промјенљива, а y зависна промјенљива.

График функције је скуп $G(f) = \{(x, y)|x \in A, y = f(x)\}$.
Функција трошкова. Укупни трошкови се састоје од два дијела:

- фиксни трошкови (FT)-који не зависе од процеса производње;
- варијабилни трошкови (VT)-који се мијењају са падом или растом производње.

Функцију укупних трошкова ћемо означавати са $T(q)$, при чему q представља потражњу или понуду.

$$T(q) = FT + VT(q).$$

Примјер 88

Нека је трошак производње у КМ, q јединица неког производа дат са функцијом $T(q) = q^3 - 30q^2 + 500q + 200$.
Трошак производње 10 јединица овог производа рачунамо као:

$$T(10) = 10^3 - 30(10)^2 + 500(10) + 200 = 3200.$$

Трошак производње десете јединице овог производа добијамо као:

$$T(10) - T(9) = 3200 - 2999 = 201.$$

Приход. Функцију прихода означавамо са P, и она је једнака производу количине производње или потражње (q) и цијене производа.

$$P(q) = q \cdot p(q).$$

Добит. Функција добити, у ознаци D, једнака је разлици функција прихода и трошкова.

$$D(q) = P(q) - T(q).$$

Примјер 89

Истраживање тржишта је показало да ће корисници купити x хиљада апарата за кафу, ако је цијена апарата у КМ једнака

$$p(x) = -0.27x + 51.$$

Трошак производње x хиљада апарата је

$$T(x) = 2.23x^2 + 3.5x + 85$$

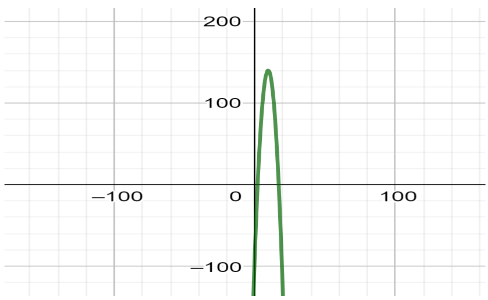
хиљада KM.
У овом случају функција прихода је

$$P(x) = xp(x) = -0.27x^2 + 51x,$$

а функција добити је

$$D(x) = P(x) - T(x) = -2.5x^2 + 47.5x - 85.$$

Њен график изгледа овако:



Производња је профитабилна када је $D(x) > 0$, односно када је

$$-2.5x^2 + 47.5x - 85 = -2.5(x^2 - 19x + 34) = -2.5(x-2)(x-17) > 0.$$

Када ријешимо неједначину, добијамо да је профит остварен за $2 < x < 17$. На графику видимо да је за ове вриједности промјенљиве x, график функције добити изнад осе x.

Дефиниција 4.2

Рационална функција је функција облика $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, при чему су $p(x)$ и $q(x)$ полиноми, и $q(x) \neq 0$.

Домен рационалне функције је скуп свих вриједности независне промјенљиве за које је именилац функције различит од нуле.

Примјер 90

Домен функције

$$f(x) = \frac{x^2 + 7x - 11}{x^2 - 4},$$

налазимо на сљедећи начин.
Нађимо нуле полинома у имениоцу:

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2) = 0.$$

Значи, нуле су $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$.
Закључујемо да је домен функције скуп:

$$D = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty).$$

Примјер 91

Домен функције $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ налазимо тако што рјешавамо неједначину:

$$x^2 - 4 \geq 0.$$

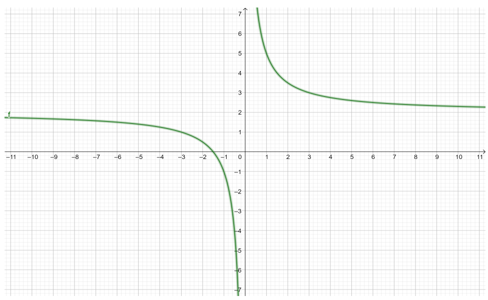
Дакле, домен је $D = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$.
У случају функције са непарним коријеном, као што је нпр. $\sqrt[3]{x^2 - 4}$, домен је скуп $\mathbb{R}$.

Просјечни трошак. Функцију просјечног трошка ћемо означавати са $\bar{T}$. Просјечни трошак добијемо када укупни трошак подијелимо са бројем произведених артикала.

$$\bar{T}(q) = \frac{T(q)}{q}.$$

Примјер 92

Ако је функција трошкова неког предузећа $T(q) = 2q + 3$, онда график функције просјечних трошкова, $\bar{T}(q) = 2 + \frac{3}{q}$ изгледа овако:



Дефиниција 4.3

Нека су дате функције $f : A \to B$ и $g : B \to C$. Композиција функција f и g, у ознаци $g \circ f$, је функција $g \circ f : A \to C$ дефинисана са

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \ x \in A.$$

Примјер 93

За функције $f(x) = x^2 + 3x + 1$ и $g(x) = x + 1$, композиција

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x+1)^2 + 3(x+1) + 1 = x^2 + 5x + 5.$$

Такође,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x^2 + 3x + 1) + 1 = x^2 + 3x + 2.$$

Композиција функција није комутативна у општем случају.

Примјер 94

Ако је $f(x) = x^2 - 3x$, онда је

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2x + h - 3.$$

4.1.1 Задаци за вјежбање

1. Да ли је y функција од x у сљедећим примјерима:
   (а) y-оцјена добијена на испиту, x-број сати проведених у учењу;
   (б) y-вјероватноћа добијања рака плућа, x-број цигарета конзумираних у једном дану;
   (в) y-тежина особе, x-колико минута особа вјежба у једном дану?
2. Наћи нуле и домен функција:
   (а) $y = \frac{2x-1}{x^2-16}$; (б) $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$; (в) $y = x^2 - 4x + 3$.
3. Дате су функције потражње $q(p) = -p + 20$ и просјечних трошкова $\bar{T}(q) = q - 8 + \frac{80}{q}$. Одредити:
   (а) функцију добити и њен график;
   (б) потражњу за коју је добит једнака нули;
   (в) интервал рентабилне производње;
   (г) максималну могућу добит и потражњу на којој се остварује.
4. Ако је $f(x) = \frac{5}{x-2} + 4(x-2)^3$, наћи функције $g(u)$ и $h(x)$ такве да је $f(x) = g(h(x))$.

4.2 Гранична вриједност (лимес) функције

Да бисмо објаснили појам лимеса, посматрајмо примјер једног менаџера који је одредио да кад његова фабрика користи $x\%$ производног капацитета, укупни трошак фабрике у хиљадама конвертибилних марака је

$$T(x) = \frac{8x^2 - 636x - 320}{x^2 - 68x - 960}.$$

Фабрика подешава одржавање погона тако да се отприлике око 80% њеног капацитета увијек користи. У том идеалном стању са 80% искориштеног капацитета, за очекивати је да се очекивани трошкови добију када израчунамо $T(80)$. Међутим, у том случају добијемо неодређени облик $\frac{0}{0}$. Оно што можемо урадити је да израчунамо $T(x)$ за вриједности промјенљиве x које су мало веће и мало мање од 80, као у табели испод.

x	79.8	79.99	79.999	80	80.0001	80.001	80.04
$T(x)$	6.99782	6.99989	6.99999	0/0	7.000001	7.00001	7.00043

Одавде видимо да се вриједности функције трошка приближавају броју 7 када се вриједности промјенљиве x приближавају броју 80 са обје стране. Тако да се може очекивати трошак од 700000 КМ када је 80% производног капацитета искориштено.
У овом случају кажемо да $T(x)$ тежи броју 7, када x тежи броју 80, и пишемо:

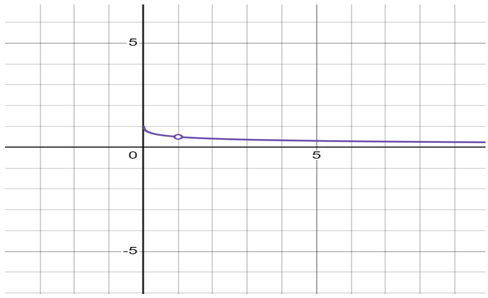
$$\lim_{x\to 80} T(x) = 7.$$

Неформално, ако се вриједности $f(x)$ све више приближавају неком броју L када се вриједности x приближавају броју c са обје његове стране, у том случају кажемо да је L лимес функције $f(x)$ у тачки $x = c$, што означавамо са:

$$\lim_{x\to c} f(x) = L.$$

Примјер 95

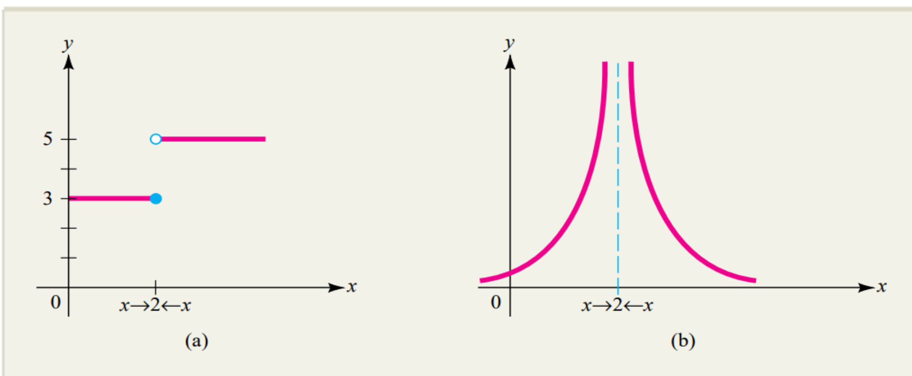
График функције $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ је:



Овдје можемо видјети да ако се приближавамо броју 1 на x оси са лијеве и са десне стране, вриједност функције се приближава броју 0.5. Значи,

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = 0.5.$$

Исто смо могли закључити увршатавањем бројева мало мањих и мало већих од 1 умјесто промјенљиве x у једначину функције.



На горњој слици можемо да видимо два примјера функција које

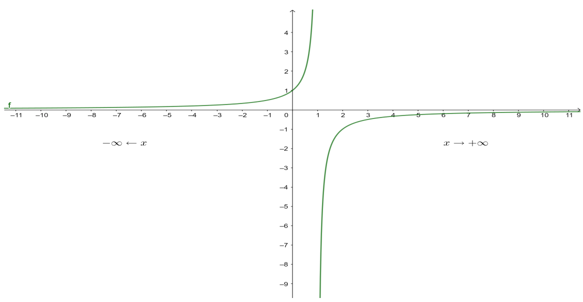
немају лимес када x тежи броју 2. На слици (a) видимо да ако се приближавамо броју 2 са десне стране, вриједност функције се приближава броју 5. Ако се приближавамо броју 2 са лијеве стране, вриједност функције се приближава броју 3. На слици (b) видимо да ако се приближавамо броју 2 са обје стране, вриједност функције неограничено расте.
Ако пустимо да вриједности промјенљиве x неограничено расту, односно ако x тежи у $+\infty$, и ако се при томе вриједности функције $f(x)$ приближавају броју L, кажемо да је лимес функције број L када $x \to +\infty$, и пишемо

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L.$$

Слично дефинишемо и лимес функције када $x \to -\infty$ и означавамо са

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$

На сљедећој слици видимо примјер функције чији је лимес једнак 0 када $x \to \pm\infty$.



Може се десити и да је

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty; \ \lim_{x \to a} = -\infty.$$

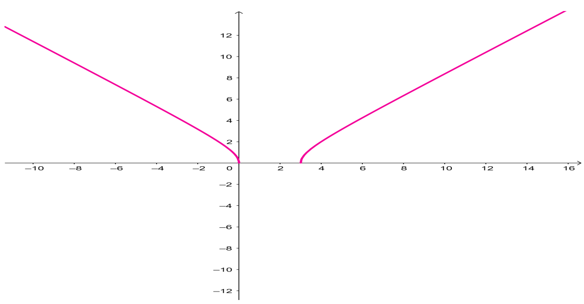
Код функције на претходној слици видимо да вриједности функције неограничено расту када се x приближава броју 1 слијева, те да неограничено опадају када се x приближава броју 1 здесна. То пишемо као

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = +\infty; \ \lim_{x\to 1+} f(x) = -\infty.$$

Ако се x приближава неком броју a слијева, онда говоримо о лијевом лимесу функције $f(x)$, и означавамо га са $\lim_{x\to a-} f(x)$. На исти начин, ако се x приближава броју a здесна, ради се о десном лимесу функције $f(x)$ којег означавамо са $\lim_{x\to a+} f(x)$.
Напомињемо да лимес функције $f(x)$ у тачки $x = a$ постоји ($\lim_{x\to a} f(x) = L$) ако је $\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = L$.
Када вриједности функције неограничено расту (опадају) када вриједности промјенљиве x неограничено расту или неограничено опадају, кажемо да функција има граничну вриједност $+\infty$ $(-\infty)$ када $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$, што пишемо као

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty; \ \lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty;$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty; \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty.$$

На сљедећој слици видимо функцију чије вриједности неограничено расту (опадају) када $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$.



Особине лимеса. Ако $\lim_{x\to c} f(x)$ и $\lim_{x\to c} g(x)$ постоје и коначни су, онда вриједи сљедеће:

$$\lim_{x\to c}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x);$$
$$\lim_{x\to c} kf(x) = k\lim_{x\to c} f(x), \quad \lim_{x\to c} k = k \quad k = const.;$$
$$\lim_{x\to c}[f(x)g(x)] = [\lim_{x\to c} f(x)][\lim_{x\to c} g(x)];$$
$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}; \ g(x) \neq 0; \ \lim_{x\to c} g(x) \neq 0;$$
$$\lim_{x\to c}[f(x)]^p = [\lim_{x\to c} f(x)]^p;$$ p је реалан број за који је дефинисан $[\lim_{x\to c} f(x)]^p$.

Напомињемо да особине лимеса вриједе за $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Теорема 4.1

Нека су $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ полиноми и $a \in \mathbb{R}$. Вриједи:

1. $\lim_{x\to a} P_n(x) = P_n(a)$.
2. $\lim_{x\to a} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(a)}{Q_m(a)}$, $Q_m(a) \neq 0$.

Доказ. (1) Нека је $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. На основу особина лимеса, имамо да је

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} P_n x &= a_n \lim_{x\to a} x^n + a_{n-1}\lim_{x\to a} x^{n-1} + \ldots + a_1 \lim_{x\to a} x + a_0 \\ &= a_n(\lim_{x\to a} x)^n + a_{n-1}(\lim_{x\to a} x)^{n-1} + \ldots + a_1 \lim_{x\to a} x + a_0 \\ &= a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \ldots + a_1 a x + a_0 = P_n(a). \ \square\end{aligned}$$

У случају $Q_m(a) = 0$ потребно је факторисати полиноме у бројиоцу и имениоцу, а затим скратити разломак.

Примјер 96

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1}(2x^2-5x+10) &= 2(\lim_{x\to -1} x)^2 - 5(\lim_{x\to -1} x) + \lim_{x\to -1} 10\\ &= 2(-1)^2 - 5(-1) + 10 = 2+5+10 = 17.\end{aligned}$$

Примјер 97

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 6.$$

Примјер 98

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{3x^2-5x+2} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{3-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}} = \frac{2+0+0}{3-0+0} = \frac{2}{3}.$$

Примјер 99

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} &= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Без доказивања тачности, наводимо важне лимесе:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e;$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Помоћу лимеса ћемо дефинисати важан појам непрекидне функције.

Дефиниција 4.4

Нека је функција f дефинисана у тачки $x = a$ и у некој околини те тачке. Функција f је непрекидна у тачки $x = a$ ако постоји лимес функције у тачки $x = a$ и ако је он једнак вриједности функције у тој тачки, односно $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Помоћу ове дефиниције дефинишемо непрекидну функцију као функцију која је непрекидна у свакој тачки из своје области дефинисаности. Интуитивно, функција је непрекидна ако њен график нема прекида, тј. можемо га нацртати без подизања оловке са папира. Дакле, за непрекидну функцију f вриједи

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x) = f(a),$$

односно, lim и f комутирају.
Поновимо да је асимптота права којој се функција приближава у бесконачно далекој тачки, те да постоје три врсте асимптота: вертикална, хоризонтална и коса.

Дефиниција 4.5

- Праву $x = a$ називамо вертикална асимптота графика функције $f : \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$, ако је

$$\lim_{x\to a-} f(x) = +\infty \ (-\infty)$$

  или

$$\lim_{x\to a+} f(x) = +\infty \ (-\infty).$$

- Праву $y = kx + n$ $(y = n)$ називамо:

– десна коса (хоризонтална) асимптота графика функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ако је

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx - n) = 0 \ \ (\lim_{x\to+\infty}(f(x) - n) = 0.$$

– лијева коса (хоризонтална) асимптота графика функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ако је

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x) - kx - n) = 0 \ \ (\lim_{x\to-\infty}(f(x) - n) = 0.$$

– обострана коса (хоризонтална) асимптота графика функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ако је истовремено десна и лијева коса (хоризонтална) асимптота.

Може се показати да је права $y = kx + n$ десна (лијева) асимптота функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ако и само ако је

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = k \ (\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = k$$

и

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = n \ \ \lim_{x\to-\infty}(f(x) - kx) = n.$$

Ако је при томе $k = 0$, онда праву $y = n$ називамо десна (лијева) хоризонтална асимптота.

Примјер 100

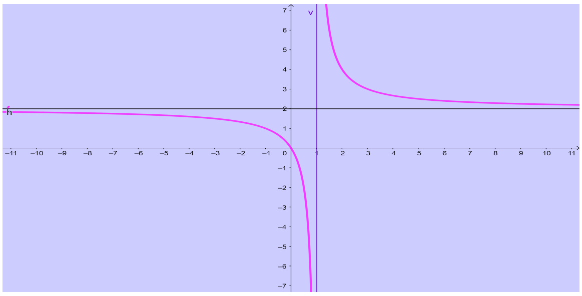
Вертикална асимптота графика функције $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ је права $x = 1$, јер је

$$\lim_{x\to1-}\frac{2x}{x-1} = -\infty, \ \lim_{x\to1+}\frac{2x}{x-1} = +\infty.$$

Пошто је

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x^2 - x} = 0, \ n = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x-1} = 2,$$

права $y = 2$ је хоризонтална асимптота функције.
График функције и њених асимптота је дат на сљедећој слици:



4.2.1 Задаци за вјежбање

1. Наћи лимесе:

$$\text{(а)}\ \lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2};\quad \text{(б)}\ \lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2};\quad \text{(в)}\ \lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3};\quad \text{(г)}\ \lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}.$$

2. Наћи лимесе:

$$\text{(а)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{-x^3+2x+1}{x-3};\quad \text{(б)}\ \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4};\quad \text{(в)}\ \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x).$$

3. Дата је функција укупних трошкова неког предузећа:

$$T(q) = 10\sqrt{q^2-50q} + 2q.$$

За коју количину производње је функција $T(q)$ дефинисана?
Наћи функцију просјечних трошкова, а затим интерпретирати

$$\lim_{q\to\infty}\bar{T}(q).$$

4.3 Изводи

У економији је важно знати којом се брзином мијења нека економска величина у односу на промјену неке друге величине. Из тог разлога посматрамо промјену зависне промјенљиве y у односу на промјену независне промјенљиве x, у функцији

$$y = f(x).$$

Желимо да знамо да ли се y мијења брже или спорије од промјенљиве x. Промјену величине x ћемо означавати са $\Delta x = x_1 - x_0$, и зваћемо је прираштај независне промјенљиве x. Значи да нову вриједност, x_1 можемо написати као $x_1 = x_0 + \Delta x$. Истовремено се мијења и y, и ту промјену ћемо означити са Δy:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Величину Δy називамо прираштај функције. Количник $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ мјери просјечну стопу промјене промјенљиве y у односу на промјену промјенљиве x. Ако је $\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right| > 1$, онда се y мијења брже од промјенљиве x, и обрнуто ако је $\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right| < 1$, онда се y мијења спорије од x. На примјер, стопа инфлације је стопа промјене општег нивоа цијена, и једнака је количнику:

$$\frac{\text{ниво цијена у години t} - \text{ниво цијена у години t-1}}{\text{ниво цијена у години t-1}}.$$

Често је у пракси важно посматрати стопу промјене промјенљиве y када је промјена Δx врло мала, јер у том случају се може добити приближна вриједност стопе промјене $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, изостављањем свих израза у количнику који постају занемарљиво мали под дјеловањем величине Δx. Такав инфинитезимално мали прираштај зависне промјенљиве називамо диференцијал, и означавамо са dy. Дакле,

$$dy = y(x + dx) - y(x),$$

при чему је dx ознака за инфинитезимално малу промјену независне промјенљиве x.

Примјер 101

Нека је дата функција $f(x) = 5x^2 + 4$. За неку вриједност независне промјенљиве x_0, вриједност функције је $f(x_0) = 5x_0^2 + 4$, а њена вриједност за $x = x_1 = x_0 + \Delta x$ је $f(x_0 + \Delta x) = 5(x_0 + \Delta x)^2 + 4$. Дакле, стопа промјене промјенљиве y у односу на промјену промјенљиве x је:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5(x_0 + \Delta x)^2 + 4 - (5x_0^2 + 4)}{\Delta x} = 10x_0 + 5\Delta x.$$

Ако је $x_0 = 1$ и $\Delta x = 2$, онда ће просјечна стопа промјене промјенљиве y бити $10 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 20$.
Ако је Δx довољно мала, имамо да је

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 10x_0 + 5\Delta x \approx 10x_0.$$

Дакле,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 10x_0.$$

Ову граничну вриједност називамо извод или деривација функције $y = f(x)$ у тачки $x = x_0$, и означавамо са $f'(x_0)$.

Дефиниција 4.6

Нека је $y = f(x)$ функција дефинисана у тачки $x = x_0$ и некој њеној околини. Ако постоји гранична вриједност

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \tag{4.1}$$

онда кажемо да функција има извод у тачки x_0.
Извод функције f у тачки x_0 означавамо са $f'(x_0)$.

У општем случају пишемо

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}.$$

Уколико је лимес (4.1) коначан, кажемо да је функција f диференцијабилна у тачки $x = x_0$.

Примјер 102

Ако је неки произвођач одредио да се добит за производњу x хиљада артикала добије по формули:

$$D(x) = -400x^2 + 6800x - 12000$$

КМ, онда стопу промјене функције прихода у односу на промјену промјенљиве x, када је произведено 9000 артикала, рачунамо на сљедећи начин:

$$\begin{aligned}
D'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{D(x+\Delta x) - D(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-400(x+\Delta x)^2 + 6800(x+\Delta x) + 400x^2 - 6800x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-400(\Delta x)^2 - 800\Delta x \cdot x + 6800\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (-400\Delta x - 800x + 6800) = -800x + 6800.
\end{aligned}$$

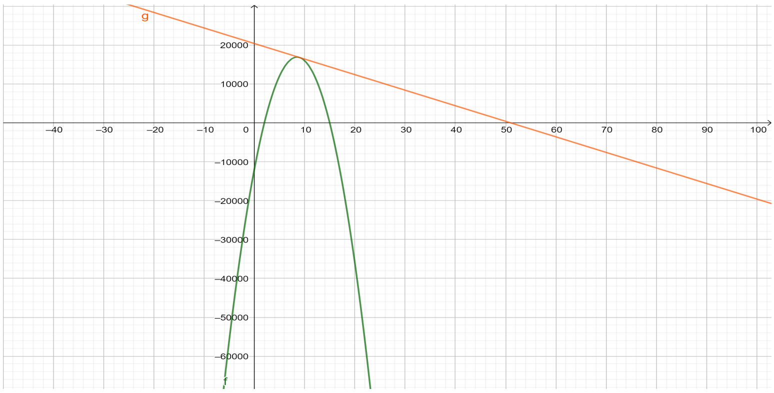
Дакле, у случају производње $x = 9$ (9000) артикала, стопа промјене добити је

$$D'(9) = -800 \cdot 9 + 6800 = -400 \text{ KM}$$

за сваких 1000 произведених артикала.

У геометријском смислу, први извод функције у некој тачки A представља коефицијент правца тангенте на функцију у A.

Геометријски приказ ситуације из претходног примјера можемо видјети на доњој слици: -400 је коефицијент правца тангенте g на функцију D, у тачки са апсцисом $x = 9$.



Теорема 4.2

Ако су f и g диференцијабилне функције, и c константа, онда вриједи сљедеће:

1. $[cf(x)]' = cf'(x)$;
2. $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$;
3. $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
4. $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$, $\quad g(x) \neq 0$.

Доказ. 1. Означимо са $h(x) = cf(x)$. Имамо

$$[cf(x)]' = h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x+\Delta x) - cf(x)}{\Delta x}$$
$$= c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = cf'(x). \quad \square$$

Наводимо табелу извода неких елементарних функција са којим ћемо се најчешће сусретати.

Функција	Извод функције
c-константа	0
x	1
x^n; $n \in \mathbb{R}$, $x > 0$	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
a^x, $a > 0$	$a^x \ln a$
e^x	e^x
$\log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

Показаћемо, на основу дефиниције извода, да је $(e^x)' = e^x$. Имамо

$$(e^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Након увођења смјене $e^{\Delta x} - 1 = t$, односно $\Delta x = \ln(1+t)$, имамо да $t \to 0$ када $\Delta x \to 0$. Лимес постаје

$$\begin{aligned}(e^x)' &= e^x \lim_{t \to 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = e^x \lim_{t \to 0} \frac{1}{\frac{1}{t}\ln(1+t)} = e^x \frac{1}{\lim_{t\to 0} \ln(1+t)^{\frac{1}{t}}} \\ &= e^x \frac{1}{\ln \lim_{t \to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}} = e^x \frac{1}{\ln e} = e^x.\end{aligned}$$

Примјетимо да смо овдје користили чињеницу да је e^x непрекидна функција, те она комутира са lim.

Примјер 103

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)' &= \frac{(1+\sqrt{x})'(1-\sqrt{x})-(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})'}{(1-\sqrt{x})^2}\\ &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x})-(1+\sqrt{x})\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(1-\sqrt{x})^2}\\ &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x}+1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{2}{2\sqrt{x}}}{(1-\sqrt{x})^2} = \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}.\end{aligned}$$

Примјер 104

Наћи извод функције $f(x) = 3^x \cdot 5^{-x-1}$.
Најприје ћемо трансформисати израз: $f(x) = 3^x \cdot 5^{-x} \cdot 5^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x$.
Значи, $f'(x) = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x \cdot \ln\frac{3}{5}$.

Примјер 105

$$(x\ln x)' = x'\ln x + x(\ln x)' = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

Примјер 106

Укупна продаја фирме (у милионима конвертибилних марака) у наредних t мјесеци је дата са $S(t) = \sqrt{t}+2$. Наћи и интерпретирати $S(25)$ и $S'(25)$. Искористити добијене резултате за процјену укупне продаје након 26 и након 27 мјесеци.
Рјешење.

Имамо да је
$$S'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$
За $t = 25$, добијамо
$$S(25) = 7;\ S'(25) = \frac{1}{10} = 0.1.$$
Значи, након 25 мјесеци укупна продаја фирме ће износити 7 милиона КМ и повећаваће се за 100000 КМ мјесечно.
Уколико стопа повећања остане непромијењена, закључујемо да ће након 26 мјесеци продаја износити 7.1 милион, а након 27 мјесеци ће износити 7.2 милиона.

Маргиналне економске функције. Маргинални или гранични трошак (MT) представља промјену укупног трошка до које долази са производњом додатне јединице производа. На примјер, ако су укупни трошкови производње два телевизора 1000 КМ, а укупни трошкови производње три телевизора 1200 КМ, гранични трошак производње трећег телевизора ће бити 200 КМ. Математички, функција маргиналног трошка је извод функције укупног трошка:
$$MT(q) = \frac{d}{dq}T(q) = T'(q).$$

Примјер 107

Седмични укупни трошак (у КМ) производње x резервоара за гориво је дат са
$$T(x) = 10000 + 90x - 0.05x^2.$$

1. Наћи функцију маргиналног трошка.
2. Наћи маргинални трошак у случају производње 500 резервоара седмично, а затим интерпретирати добијени резултат.

3. Наћи трошак производње 501. резервоара.

Рјешење.

1. $MT(x) = T'(x) = 90 - 0.1x$.
2. $MT(500) = 90 - 0.1 \cdot 500 = 40$.
   Значи, на нивоу производње од 500 резервоара, укупни трошак производње се повећава за 40 КМ по резервоару.
3. $T(501) - T(500) = 39.95$ КМ.

Из овог примјера видимо да је маргинални трошак $MT(500)$ приближно једнак $T(501) - T(500)$. У општем случају имамо сљедеће тврђење.

Теорема 4.3

Ако је $T(q)$ укупни трошак производње q јединица производа, онда је

$$MT(q) \approx T(q+1) - T(q).$$

Маргинални или гранични приход (MP) је промјена укупног прихода добијеног продајом додатних јединица производа. Математички, функција маргиналног прихода је извод функције укупног прихода:

$$MP(q) = \frac{d}{dq}P(q) = P'(q).$$

На сличан начин дефинишемо функције маргиналне добити, маргиналног просјечног трошка, маргиналног просјечног прихода и маргиналне просјечне добити.

Еластичност. Еластичност је способност економске величине y да реагује на промјене величине x, од које функционално зависи. Рачуна се помоћу коефицијента еластичности, у ознаци $E_{y,x}$.

$$E_{y,x} = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \cdot y',$$

гдје $\frac{dy}{y}$ и $\frac{dx}{x}$ означавају релативну промјену величина y и x, редом.
Ако је на нивоу $x = x_0$ гранична вриједност једнака просјечној вриједности, коефицијент еластичности функције y на нивоу $x = x_0$ је једнак $E_{y,x} = 1$.
Ако је на нивоу $x = x_0$ $|E_{y,x}| < 1$, кажемо да је функција y нееластична на нивоу $x = x_0$.
Ако је на нивоу $x = x_0$ $|E_{y,x}| > 1$, кажемо да је функција y еластична на нивоу $x = x_0$.

Примјер 108

Нека је дата функција потражње $q(p) = -p^2+10$, p означава цијену. Коефицијент еластичности ове функције је:

$$E_{q,p} = \frac{p}{q} \cdot q'(p) = \frac{p}{-p^2+10} \cdot (-2p) = \frac{-2p^2}{-p^2+10}.$$

На нивоу цијене $p = 2$, коефицијент еластичности је:

$$E_{q,p}(p=2) = \frac{-2 \cdot 4}{-4+10} = -\frac{4}{3}.$$

Ово значи да када је цијена $p = 2$, ако цијену повећамо за 1% њене вриједности, потражња ће се смањити за $\frac{4}{3}$%.

4.3.1 Задаци за вјежбање

1. Одредити изводе сљедећих функција:

   (a) $f(x) = 5(1 - 2\sqrt[3]{x^2})(2 - \sqrt{x})$;

(б) $g(x) = \frac{x+2}{x^2+x-1}$;

(в) $f(x) = 4x^3 - \frac{100}{x^2} + \frac{4}{5\sqrt[3]{x}} - \frac{6}{7x\sqrt[4]{x}}$;

(г) $f(x) = \frac{2\sqrt[3]{x^2}-4x^2+3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$;

(д) $f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$;

(ђ) $f(x) = \frac{xe^x-1}{xe^x+3}$;

(е) $f(x) = 4x \cdot 4^x$;

(ж) $f(x) = \frac{5^x}{3^x}$.

2. Задата је цијена p као функција потражње q: $p(q) = \frac{2q+3}{q-1}$. Показати да је извод ове функције негативан за све нивое потражње $q > 1$.

3. Задата је функција укупних трошкова $T(q) = q^3 - \frac{3}{2}q^2 + 6q$. Показати да је извод ове функције позитиван за све нивое производње $q > 0$.

4. Укупна продаја фирме (у милионима конвертибилних марака) у наредних t мјесеци је дата са $S(t) = \sqrt{t+4}$. Наћи и интерпретирати $S(12)$ и $S'(12)$. Искористити добијене резултате за процјену укупне продаје након 13 и након 14 мјесеци.

5. Нека је функција потражње q у зависности од цијене p дата са $q(p) = 10000 - 1000p$, и нека је функција укупног трошка $T(q) = 7000 + 2q$. Наћи функцију прихода $P(q)$, а затим гранични приход за $q = 2000$ и објаснити његово значење.

6. Дата је цијена p као функција потражње q, $p(q) = 100(2+q)^{-2}$. Одредити коефицијент еластичности $E_{q,p}$ на нивоу $p = 4$ и објаснити значење резултата.

4.4 Изводи сложених функција

Претпоставимо да је трошак производње (T) функција од броја произведених артикала (q), који је с друге стране функција од броја сати рада (h). Тада је $\frac{dT}{dq}$ стопа промјене функције трошка у односу на промјену промјенљиве q, и $\frac{dq}{dh}$ стопа промјене функције q у односу на промјену промјенљиве h. Акопомножимо ове двије промјене, добијамо стопу промјене функције трошка у односу на промјену промјенљиве h:

$$\frac{dT}{dh} = \frac{dT}{dq}\frac{dq}{dh}.$$

У општем случају можемо формулисати сљедеће правило.

Теорема 4.4

Нека су $y = f(u)$ и $u = g(x)$ диференцијабилне функције, онда је композиција $y = f(g(x))$ диференцијабилна функција, и вриједи

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \text{ или } \frac{dy}{dx} = f'(g(x))g'(x).$$

Примјер 109

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\sqrt{1-3x^4}}\right)' &= \left((1-3x^4)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}(1-3x^4)^{-\frac{3}{2}}(1-3x^4)' \\ &= -\frac{1}{2}(1-3x^4)^{-\frac{3}{2}}(-12x^3) = \frac{6x^3}{\sqrt{(1-3x^4)^3}}.\end{aligned}$$

Примјер 110

$$\left(e^{\sqrt{x}}\right)' = e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x})' = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Примјер 111

$$\left(\ln\left(x^3+\frac{1}{x}\right)\right)' = \frac{1}{x^3+\frac{1}{x}}\left(x^3+\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^3+\frac{1}{x}}\left(3x^2-\frac{1}{x^2}\right).$$

Уколико налазимо извод имплицитно задате функције, потребно је наћи извод лијеве и десне стране једнакости по промјенљивој x, имајући у виду да је y функција од x.

Примјер 112

Наћи y' ако је $x^3y^2+3y^3=4x-3y$.
Рјешење.
Имамо

$$(x^3y^2+3y^3)' = (4x-3y)',$$

тј.

$$3x^2y^2+x^3\cdot 2yy'+9y^2y' = 4-3y',$$

одакле слиједи

$$(2x^3y+9y^2+3)y' = 4-3x^2y^2.$$

Значи,

$$y' = \frac{4-3x^2y^2}{2x^3y+9y^2+3}.$$

4.4.1 Задаци за вјежбање

1. Наћи изводе сљедећих функција:

   (a) $f(x)=\sqrt{\frac{x^2}{2(x+1)}}$;

(б) $f(x) = (3^x)^2$;
(в) $f(x) = 4^{\sqrt{1-x^3}}$;
(г) $f(x) = ln\frac{x}{1-x}$;
(д) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$;
(ђ) $f(x) = \frac{xe^{2x}-1}{xe^{2x}+1}$.

2. Дата је функција $f(x) = \frac{1-\log x}{1+\log x}$. Израчунати $f'(10)$.
3. Дата је функција $f(x) = x^2 e^{x\sqrt{x}}$. Израчунати $f'(1)$.
4. Наћи y' ако је $x^2y^3 - 5 = 4y^4 - x$.

4.5 Изводи вишег реда

Понекад је у пракси потребно наћи стопу промјене функције која је и сама стопа промјене неке друге функције. На примјер, у периоду инфлације можемо чути како се говори да иако инфлација расте, стопа раста опада. То значи да иако цијене расту, не расту више тако брзо као прије.
Стопа промјене функције $f'(x)$ је њен извод, $(f'(x))'$, који ћемо записивати као $f''(x)$, и зваћемо га други извод функције $f(x)$.

Примјер 113

$$\begin{aligned}(x^2(3x+1))'' &= ((x^2(3x+1))')' \\ &= (2x(3x+1) + x^2 \cdot 3)' = (9x^2 + 2x)' = 18x + 2.\end{aligned}$$

Дефиниција 4.7

Ако је функција f диференцијабилна у тачки x_0 и ако постоји

лимес
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f'(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x},$$
онда тај лимес називамо други извод функције $f(x)$ у тачки x_0 и означавамо са $f''(x_0)$, $f^{(2)}(x_0)$ или $\frac{d^2f(x_0)}{dx^2}$.
У општем случају, нека функција f има извод реда $(n-1)$ у тачки x_0. Ако постоји извод функције $f^{(n-1)}(x)$ у тачки x_0, онда тај извод називамо n-ти извод функције $f(x)$ у тачки x_0 и означавамо са $f^{(n)}(x_0)$ или $\frac{d^nf(x_0)}{dx^n}$. Значи,
$$f^{(n)}(x_0)=\left(f^{(n-1)}\right)'(x_0).$$

Примјер 114

Једно истраживање ефикасности је показало да ће радник који почне радити у 8:00 ујутро произвести $Q(t)=-t^3+6t^2+24t$ артикала, након t сати рада. Да нађемо стопу продуктивности радника у 11:00, поступамо на сљедећи начин. Стопа продуктивности радника је функција:
$$R(t)=Q'(t)=-3t^2+12t+24.$$
Стопу продуктивности у $11:00$ налазимо уврштавањем $t=3$ у функцију $R(t)$:
$$R(3)=-3\cdot 9+12\cdot 3+24=33.$$
Значи, радник произведе 33 артикла по сату.
Да бисмо нашли стопу промјене стопе продуктивности, налазимо други извод функције $Q(t)$, односно (први) извод функције $R(t)$.
$$R'(t)=-6t+12.$$

У 11:00, стопа промјене је $R'(3) = -6 \cdot 3 + 12 = -6$. Значи да се продуктивност смањује за 6 артикала по сату.

4.6 Задаци за вјежбање

1. Наћи други извод функција:
   (а) $f(x) = 12x^2 + 10x + 6$;
   (б) $f(x) = \frac{1}{x}$;
   (в) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$;
   (г) $f(x) = e^x$.

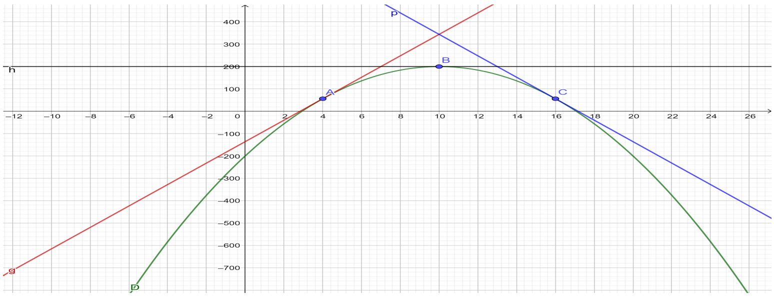
2. Наћи четврти извод функција:
   (а) $f(x) = 15x^5 - x^3 + 4$;
   (б) $f(x) = \frac{2}{x}$;
   (в) $f(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^5$;
   (г) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$.

3. Процијењено је да ако се одређена врста парфема прода за p КМ по бочици, онда ће се продати $B(p) = \frac{500}{p+3}$, $p \geq 5$ бочица мјесечно. У том случају укупни трошак је $T(p) = 0.2p^2 + 3p + 200$.
   Наћи функцију добити у функцији цијене. Затим наћи стопу промјене добити када је цијена бочице парфема 12 КМ. Да ли се добит повећава или смањује?

4. Наћи y'' ако је $(2x^3 + 3y)^5 = 4x^2y^4 - 2x$.

4.7 Екстреми функција једне промјенљиве

Када радимо са економским функцијама, битно нам је да знамо њихове минималне или максималне вриједности. На примјер, која количина производње ће обезбиједити максималну добит, или за коју количину производа се остварују минимални трошкови производње. За налажење ових вриједности, као и вриједности тачака у којима се оне достижу, користићемо изводе функција.



На овој слици је приказан график функције добити:

$$D(q) = 80q - 4q^2 - 200 \ (KM).$$

Посматрајмо три тангенте на овај график: $g(q) = 48q - 136$, $h(q) = 200$, и $p(q) = -48q + 824$, у тачкама $A(4, 56)$, $B(10, 200)$ и $C(16, 56)$, редом. У тачки A, функција је растућа, коефицијент правца тангенте g је 48, односно стопа раста за количину потражње $q = 4$ износи 48 КМ по артиклу. У тачки B, тангента је константна функција, значи да је њен коефицијент правца 0. У економском смислу, то значи да је добит достиже свој максимум (200 КМ) за количину потражње $q = 10$. Слично, у тачки C стопа пада добити је 48 КМ, јер је коефицијент правца тангенте p једнак -48.

Теорема 4.5

Ако је функција f диференцијабилна на интервалу I, онда вриједи:

- Ако је $f'(x) > 0$ за $x \in I$, онда је f строго растућа функција на I;
- Ако је $f'(x) < 0$ за $x \in I$ онда је f строго опадајућа функција

на I.

Примјер 115

Наћи интервале монотоности функције $f(x) = 16x - x^2$.
Рјешење. Први извод функције је

$$f'(x) = 16 - 2x.$$

Имамо

$$f'(x) > 0 \text{ за } x < 8,$$

и

$$f'(x) < 0 \text{ за } x > 8.$$

Значи, функција расте на интервалу $(-\infty, 8)$, а опада на $(8, +\infty)$.

Дефиниција 4.8

Број c из домена функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називамо критична тачка ако вриједи једно од тврђења:

1. $f'(c) = 0$;
2. $f'(c)$ не постоји.

Примјер 116

Функција $f(x) = \frac{1}{x+3}$ нема критичних тачака. Први извод је

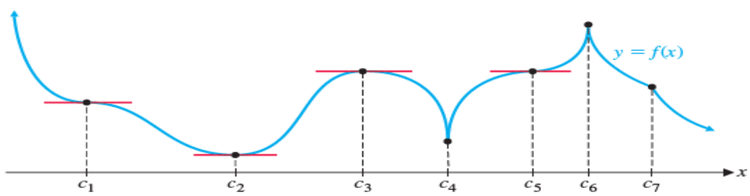
$$f'(x) = -\frac{1}{(x+3)^2} \neq 0.$$

На сљедећој слици дат је график непрекидне функције која достиже максималне вриједности у тачкама c_3 и c_6, и минималне вриједности у c_2 и c_4. Ове вриједности називамо локални екстреми. У општем случају, $f(c)$ је *локални минимум* ако постоји интервал (a, b) који садржи c тако да

$$f(c) \leq f(x), \text{ за } x \in (a, b).$$

Слично, $f(c)$ је *локални максимум* ако постоји интервал (a, b) који садржи c тако да

$$f(x) \leq f(c), \text{ за } x \in (a, b).$$



Локалне максимуме и локалне минимуме називамо локални екстреми. Критичну тачку у којој функција достиже локални екстрем називамо *стационарна тачка*. Тачке c_1, c_5 и c_7 су критичне тачке, али не и стационарне.

Теорема 4.6

Нека је $f''(x)$ дефинисан у стационарној тачки c функције $f(x)$. Ако је $f''(c) > 0$ ($f''(c) < 0$), функција $f(x)$ достиже локални минимум (максимум) у стационарној тачки.

Примјер 117

Одредићемо локалне екстреме функције: $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$.

Функција је дефинисана за свако $x \neq 0$. Први извод функције је:

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} + xe^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} = e^{-\frac{1}{x}} \frac{x+1}{x}.$$

Како је $e^{-\frac{1}{x}} > 0$ за $x \neq 0$, знак првог извода зависи од знака функције $\frac{x+1}{x}$.

	$-\infty$	-1	0	∞
y'	$+$	$-$	$+$	
y	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Из табеле видимо да функција достиже максималну вриједност за $x = -1$, и та вриједност износи $f(-1) = -e$. Иако извод функције мијења знак у околини тачке $x = 0$, та тачка није тачка екстрема функције јер не припада њеном домену.

Теорема 4.7

Просјечни трошкови су једнаки маргиналним трошковима ако су ти просјечни трошкови минимални.

Доказ. Нека су за количину производње q просјечни трошкови $\bar{T}(q)$ минимални. Значи да је q стационарна тачка функције $\bar{T}$, тј.

$$\bar{T}'(q) = 0.$$

Ово је еквивалентно са

$$\left(\frac{T(q)}{q}\right)' = \frac{q \cdot T'(q) - T(q)}{q^2} = 0.$$

Закључујемо,

$$q \cdot T'(q) - T(q) = 0 \Rightarrow q \cdot T'(q) = T(q) \Rightarrow T'(q) = \frac{T(q)}{q},$$

односно

$$MT(q) = \bar{T}(q). \square$$

Теорема 4.8

Добит је максимална на нивоу произведених и продатих производа на којем је маргинални приход једнак маргиналном трошку.

Доказ.

$$D(q) = P(q) - T(q) \Leftrightarrow D'(q) = P'(q) - T'(q) = 0$$

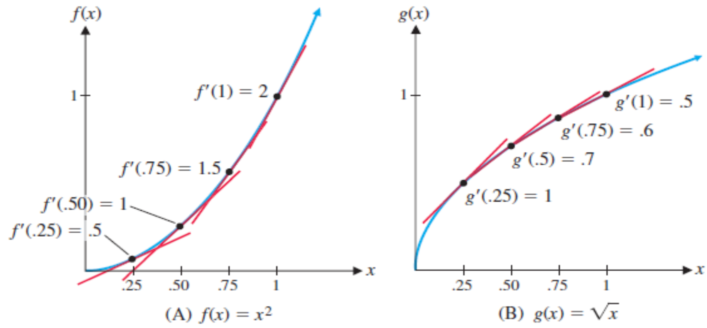
$$\Leftrightarrow P'(q) = T'(q) \Leftrightarrow MP(q) = MT(q). \square$$

Дефиниција 4.9

Нека је f диференцијабилна функција на интервалу I. График функције f је:

- Конвексан на I, ако је f' растућа функција на I;
- Конкаван на I, ако је f' опадајућа функција на I.

Геометријски, график диференцијабилне функције на интервалу I је конвексан (конкаван) ако се налази изнад (испод) својих тангенти у тачкама са апсцисама из I (не укључујући додирне тачке). На сљедећој слици су приказане конвексна (А) и конкавна (В) функција.



Конвексност (конкавност) можемо испитати помоћу другог извода функције, о чему говори наредна теорема.

Теорема 4.9

Нека функција f има изводе првог и другог реда на интервалу I. Ако је $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) за $x \in I$, онда је функција конвексна (конкавна) на I.

Доказ. Тврђење слиједи из Теореме 4.5, чињенице да је $f''(x) = (f'(x))'$, те дефиниције конвексности (конкавности). $\square$

Превојна тачка је тачка у којој је функција непрекидна и у којој прелази из конвексности (конкавности) у конкавност (конвексност). Превојна тачка је значајна из разлога што је брзина промјене функције највећа (најмања) у тачки у којој функција прелази из конвексности (конкавности) у конкавност (конвексност).

Теорема 4.10

Нека је $f(x)$ заједно са првих n извода непрекидна у околини тачке

$x = x_0$ и нека у тој околини постоји $f^{(n+1)}(x)$. Ако је

$$f''(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = 0, \quad f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$$

и n паран број, онда је $(x_0, f(x_0))$ превојна тачка функције $f(x)$.

4.7.1 Задаци за вјежбање

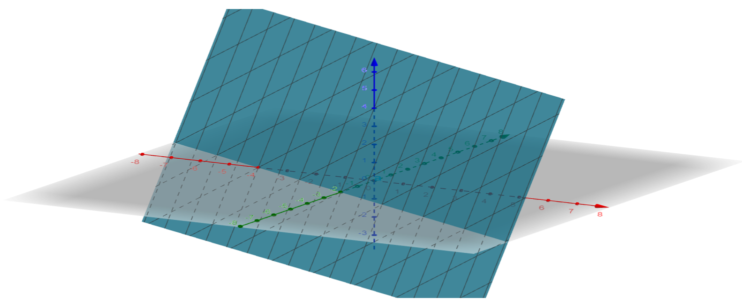
1. Наћи интервале монотоности функције $f(x) = x^2 - 6x + 10$.
2. Наћи критичне тачке функције $f(x) = 8 \ln x - x^2$.
3. Одредити екстреме функције: $f(x) = \ln(x^3 + 3)$.
4. Нека је дата функција трошка: $T(q) = -q^2 + 5q - 6$. За које вриједности производње трошкови расту, а за које опадају?
5. Дата је функција укупних трошкова: $T(q) = q^3 - 6q^2 + 16q$. Одредити минимални просјечни трошак.

4.8 Изводи функција више промјенљивих

Општи облик функције двије промјенљиве је:

$$z = f(x, y).$$

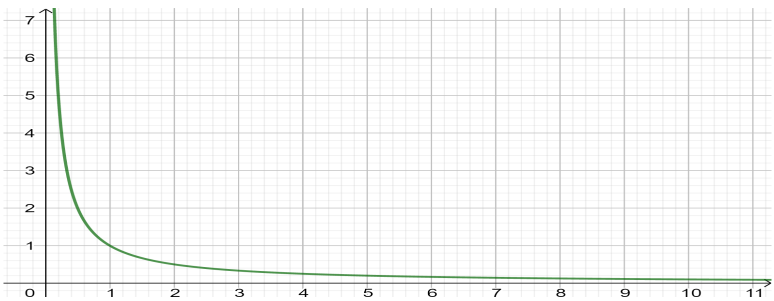
На примјер, функција $z = x + 2y + 4$. Њен график је раван:



Примјер једне економске функције је функција производње q која зависи од рада l и капитала k: $q = 5lk$.
Пошто је тешко нацртати график такве функције, обично се у економији фиксира једна промјенљива, и онда се анализира дводимензионални график функције. За $q = 5$, имамо:

$$q = 5lk \Rightarrow 5 = 5lk \Rightarrow 1 = lk \Rightarrow k = \frac{1}{l};\ k,\ l\ >\ 0.$$

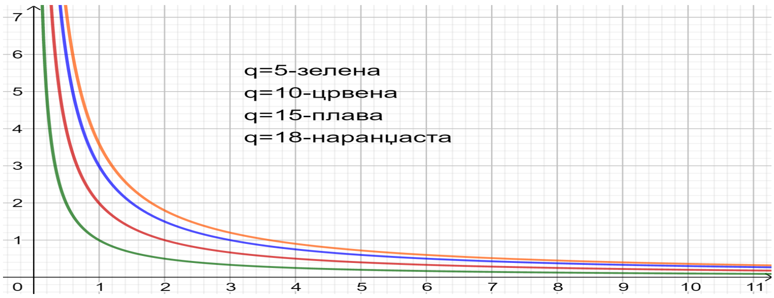
График ове криве (на доњој слици) је одсјечак тродимензионалног графика дуж равни $q = 5$, и назива се изокванта. Изокванта показује различите комбинације рада и капитала за константну вриједност производње ($q = 5$).



У доњој табели ћемо видјети једначине изокванти за још неке вриједности производње q.

Количина производње	Једначина функције производње	Једначина изокванте
$q = 5$	$5 = 5lk$	$k = \frac{1}{l}$
$q = 10$	$10 = 5lk$	$k = \frac{2}{l}$
$q = 15$	$15 = 5lk$	$k = \frac{3}{l}$
$q = 18$	$18 = 5lk$	$k = \frac{3.6}{l}$

Графике ових изокванти можемо видјети на доњој слици.



Изводе функција двије или више промјенљивих називамо парцијални изводи.
У нашем примјеру, фиксирали смо промјенљиву q. Рецимо, $q = q_0$. У том случају је

$$k = \frac{q_0}{5l} = \frac{q_0}{5} l^{-1},$$

$$\frac{dk}{dl} = \frac{q_0}{5}(-l^{-2}) = -\frac{q_0}{5l^2}.$$

Парцијалне изводе означавамо са ∂ умјесто са d. Дакле,

$$\frac{\partial k}{\partial l} = -\frac{q_0}{5l^2},\ q - \text{фиксирана промјенљива.}$$

Примјер 118

Нека је дата функција $z = x + 2y + 4$. Парцијални извод по промјенљивој x ове функције је:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + 0 + 0 = 1.$$

С друге стране, парцијални извод по промјенљивој y је:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 2 + 0 = 2.$$

Краће, парцијалне изводе првог реда означавамо са z_x или z_y.
У општем случају функцију са n промјенљивих записујемо као:

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Парцијалне изводе функције са n промјенљивих означавамо са:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = z_{x_1},\ \frac{\partial z}{\partial x_2} = z_{x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n} = z_{x_n}.$$

С обзиром на то да су парцијални изводи функција више промјенљивих такође функције више промјенљивих, можемо наћи и њихове парцијалне изводе (парцијалне изводе другог реда). Дакле,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = f_{x_1 x_1},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = f_{x_1 x_2},$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} = f_{x_1 x_n}.$$

Такође, на исти начин можемо налазити и парцијалне изводе функција $\frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_2}$:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = f_{x_2 x_1}.$$

Напоменимо овдје да у општем случају $f_{x_1 x_2} \neq f_{x_2 x_1}$. Ми ћемо се углавном сусретати са функцијама код којих су мјешовити парцијални изводи другог реда једнаки.

Имплицитно задате функције. Ако је једначином $F(y, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ имплицитно дефинисана функција $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Парцијални изводи функције f су дати са:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = -\frac{F_{x_i}}{F_y}.$$

Примјер 119

Нека је функција $y = y(x)$ имплицитно дата са: $F(y, x) = x^2 + xy + y^2 - 6 = 0$. Онда је:

$$y'(x) = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x + y}{x + 2y}.$$

Економске функције. Нека је функција потражње q_1 зависна од више промјенљивих: цијена $p_1, p_2, \ldots p_n$, дохотка k, и времена t. Тада можемо дефинисати коефицијент парцијалне еластичности функције q_1:

$$E_{q_1, p_1} = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial p_1}.$$

Такође, можемо посматрати како промјене цијена других производа утичу на q_1. То називамо коефицијент укрштене еластичности:

$$E_{q_1, p_i} = \frac{p_i}{q_1} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial p_i},\ i = 2, 3, \ldots, n.$$

Коефицијент доходовне еластичности и коефицијент еластичности у односу на вријеме су редом:

$$E_{q_1, k} = \frac{k}{q_1} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial k},$$

и

$$E_{q_1, t} = \frac{t}{q_1} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial t}.$$

Примјер 120

Нека је функција потражње $q_1(p_1, p_2) = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{5}{p_2}$. Коефицијенти парцијалне и укрштене еластичности су редом:

$$E_{q_1,p_1} = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial p_1} = \frac{p_1}{\frac{1}{2}p_1^2 + \frac{5}{p_2}} \cdot p_1 = \frac{p_1^2}{\frac{1}{2}p_1^2 + \frac{5}{p_2}},$$

и

$$E_{q_1,p_2} = \frac{p_2}{q_1} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial p_2} = \frac{p_2}{\frac{1}{2}p_1^2 + \frac{5}{p_2}} \cdot \left(-\frac{5}{p_2^2} \right) = \frac{-5}{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 + 5} = -\frac{5}{6}.$$

На нивоу цијена $p_1 = 1$ и $p_2 = 2$, када цијену првог производа p_1 повећамо за 1%, потражња за тим производом q_1 порасте приближно за $\frac{1}{3}$%, зато што је:

$$E_{q_1,p_1}(1, 2) = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{5}{2}} = \frac{1}{3}.$$

На нивоу цијена $p_1 = 1$ и $p_2 = 2$, када цијену другог производа p_2 повећамо за 1%, потражња за првим производом q_1 се смањи за приближно $\frac{5}{6}$%, зато што је:

$$E_{q_1,p_2}(1, 2) = \frac{-5}{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 + 5} = -\frac{5}{6}.$$

4.8.1 Задаци за вјежбање

1. Наћи све парцијалне изводе првог и другог реда функција:

   (а) $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 2x_1x_2^2 + x_2^2 - 10x_1 + 5.$

   (б) $f(x_1, x_2) = x_1^3x_2^2 + 2x_1^2x_2 - 3x_2 + x_1 - 5.$

2. Нека је са једначином $F(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 + x^2y^2z^2 = 0$ имплицитно дефинисана функција $y = f(x,z)$. Наћи $\frac{\partial y}{\partial z}$.

3. Нека је функција $z = f(x,y)$ имплицитно задата формулом $F(z,x,y) = x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$. Одредити парцијалне изводе првог реда функције z.

4. Дата је функција производње $q(l,c) = 2\sqrt{l^3c}$. Израчунати $E_{q,l}$ и $E_{q,c}$.

5. Нека су функције потражње производа X и Y дате са $q_1(p_1,p_2) = 200 - 5p_1 + 4p_2$ и $q_2(p_1,p_2) = 300 + 2p_1 - 4p_2$, редом. Израчунати коефицијенте укрштене еластичности и објаснити однос између производа X и Y, када је $p_1 = p_2 = 20$.

4.9 Екстреми функција више промјенљивих

Дефиниција 4.10

За функцију $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дефинишемо њену Хесеову матрицу или Хесијан као:

$$H = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix},$$

гдје су $y_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$; $i,j \in \{1,2,\ldots n\}$.

Да бисмо нашли екстремне вриједности функција више промјенљивих, поступамо на сличан начин као и у случају функција са једном промјенљивом. За функцију $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ поступак је сљедећи:

(1) Налазимо парцијалне изводе првог и другог реда:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial xj},\ i, j \in \{1, 2, \ldots n\}.$$

(2) Изједначимо изводе првог реда са нулом, и ријешимо систем једначина да бисмо добили координате стационарне тачке (стационарних тачака) $S(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = 0,\ i \in \{1, 2, \ldots n\}.$$

(3) Силвестеров критеријум
(а) Ако за Хесијан израчунат у стационарној тачки функције $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вриједи:

$$\Delta_1 = f_{11} > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} > 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} > 0 \ldots,$$

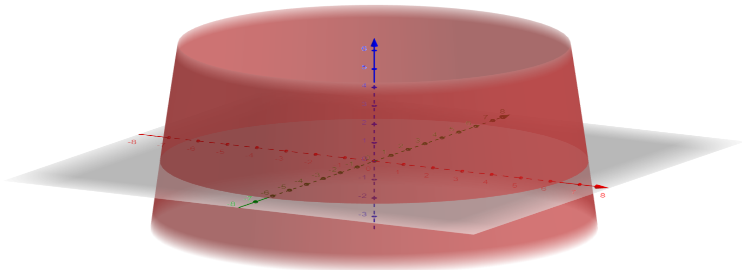
$\Delta_n = |H| > 0$, тада је стационарна тачка тачка локалног минимума.
(б) Ако за Хесијан израчунат у стационарној тачки функције $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вриједи:

$$\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 < 0, \ldots,$$

онда је стационарна тачка тачка локалног максимума.
Детерминанте Δ_1, Δ_2, Δ_3,... називамо угаони минори Хесијана.
На сљедећој слици можемо видјети график функције

$$z = -x^2 - y^2 + 40,$$

која има тачку максимума $(0, 0, 40)$.



Показаћемо да је $(0, 0, 40)$ тачка максимума функције z у сљедећем примјеру.

Примјер 121

Парцијални изводи првог реда функције $z = -x^2 - y^2 + 40$ су:

$$z_x = -2x,\ z_y = -2y.$$

Изједначавањем са нулом, добијамо да је стационарна тачка $(0, 0)$. Изводи другог реда су:

$$z_{xx} = -2,\ z_{xy} = z_{yx} = 0,\ z_{yy} = -2.$$

Сада рачунамо миноре Хесијана функције z у тачки $(0, 0)$:

$$\Delta_1 = -2 < 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

Дакле, у тачки $(0, 0)$ се достиже локални максимум. Вриједност функције у тој тачки је $z = -0 - 0 + 4 = 4$.

Примјер 122

Функције потражње за добрима X и Y су дате са $P^X = 36 - 3x$ и

$P^Y = 56 - 4y$. Онда је функција укупних прихода дата са:

$$P = P^X x + P^Y y = (36 - 3x)x + (56 - 4y)y = 36x - 3x^2 + 56y - 4y^2.$$

Наћи ћемо колико је потребно продати добара X и Y да би се приход био максималан.

$$\begin{cases} P_x = 36 - 6x = 0 \\ P_y = 56 - 8y = 0. \end{cases}$$

Рјешење овог система, односно стационарна тачка је $(6, 7)$.
Минори Хесијана функције прихода у тачки $(6, 7)$ су:

$$\Delta_1 = -6 < 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = 48 > 0.$$

Дакле, да би се остварио максимални приход $P(6, 7) = 36 \cdot 6 - 3 \cdot 36 + 56 \cdot 7 - 4 \cdot 49 = 304$, потребно је продати 6 јединица добра X и 7 јединица добра Y.

Условни екстреми. Претпоставимо да у претходном примјеру имамо ограничење да се могу произвести и продати добра у вриједности од 80 КМ, при чему јединица добра X кошта 5 КМ, а јединица добра Y кошта 10 КМ. Записано једначином, ово ограничење је:

$$5x + 10y = 80.$$

Сада видимо да рјешење $(6, 7)$ не задовољава једначину.
У даљем тексту ћемо објаснити како наћи максимални приход уз оваква ограничења помоћу Лагранжових мултипликатора. Ако желимо да нађемо екстреме функције $z = f(x, y)$ уз ограничење $g(x, y) = 0$, уводимо нову функцију (Лагранжова функција):

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y).$$

Број λ се назива Лагранжов мултипликатор.

Затим тражимо екстреме функције L. Стационарне тачке добијамо рјешавањем система једначина:

$$\begin{cases} L_x = f_x - \lambda g_x = 0 \\ L_y = f_y - \lambda g_y = 0 \\ L_\lambda = -g(x,y) = 0. \end{cases}$$

За добијање екстрема налазимо детерминанту $D = \begin{vmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{x\lambda} \\ L_{yx} & L_{yy} & L_{y\lambda} \\ L_{\lambda x} & L_{\lambda y} & L_{\lambda\lambda} \end{vmatrix}$.

Нека је $(x^0,\ y^0,\ \lambda^0)$ рјешење горњег система.
Ако је $D(x^0,\ y^0,\ \lambda^0) > 0$, онда је стационарна тачка $(x^0,\ y^0)$ тачка локалног максимума. Ако $D(x^0,\ y^0,\ \lambda^0) < 0$, онда је стационарна тачка $(x^0,\ y^0)$ тачка локалног минимума.

Примјер 123

Посматрајмо функцију прихода $P = 36x - 3x^2 + 56y - 4y^2$, уз ограничење $5x + 10y = 80$. Лагранжова функција је:

$$L = 36x - 3x^2 + 56y - 4y^2 - \lambda(5x + 10y - 80).$$

Стационарну тачку добијамо из система:

$$\begin{cases} L_x = 36 - 6x - 5\lambda = 0 \\ L_y = 56 - 8y - 10\lambda = 0 \\ L_\lambda = 80 - 5x - 10y = 0. \end{cases}$$

Рјешавањем система добијамо да је $x = 5$, $y = 5.5$, и $\lambda = 1.2$. Детерминанта Хесеове матрице у тачки $(5, 5.5, 1.2)$ је:

$$D = \begin{vmatrix} -6 & 0 & -5 \\ 0 & -8 & -10 \\ -5 & -10 & 0 \end{vmatrix} = 800 > 0,$$

што значи да у тачки $(5, 5.5)$ функција прихода достиже максималну вриједност 292, што је мања вриједност од максимума без ограничења.

4.9.1 Задаци за вјежбање

1. Наћи екстреме функција:
   (а) $f(x,y) = x^3 - y^3 + 6xy$;
   (б) $u(x,y) = 3ln\frac{x}{6} + 2lny + ln(12 - x - y)$.

2. Наћи екстреме функције $f(x,y) = xy$ уз ограничење:
   (а) $x + y = 1$;
   (б) $x^2 + y^2 = 1$.

3. Одредити минималну вриједност функције $f(x,y) = x^2 + y^2$ уз ограничење $xy = 1$.

4. За припрему и промоцију књиге додијељено је 60000 КМ. Процијењује се да ако је x хиљада конвертибилних марака додијељено за припрему, а y хиљада за промоцију, приближно ће $f(x,y) = 20x^{\frac{3}{2}}y$ копија књиге бити распродато. Колико би новца требало издвојити на припрему, а колико на промоцију да би продаја била максимална?

5. Једна фирма производи двије врсте производа, X и Y, чија је цијена 54 КМ и 52 КМ, редом. Укупни трошак фирме је дат са функцијом $T = 3x^2 + 3xy + 2y^2 - 100$. Наћи количину производа коју је потребно продати да би фирма остварила максималну добит. Затим наћи вриједност максималне добити.

6. Дата је функција трошкова $T(q_1, q_2) = 2q_1^2 + q_1q_2 + q_2^2$, гдје су $q_1, q_2 \geq 0$ количине производње за два производа. Одредити q_1 и q_2 тако да трошкови буду минимални, а да укупна производња буде 20.

5 ИНТЕГРАЛНИ РАЧУН

У Глави 4 смо видјели да се помоћу извода неке економске функције одређује одговарајућа гранична функција. Тако смо, на примјер, могли добити информацију о брзини промјене укупних трошкова помоћу функције граничног трошка. Такође, у пракси се често полази од функције граничног трошка да би се добила информација о укупним трошковима за одређене нивое производње. Математички, то значи да треба одредити функцију чији нам је извод познат. Из тог разлога дефинишемо сљедеће.

Дефиниција 5.1

Нека су функције $F(x)$ и $f(x)$ дефисане на интервалу $(a, b) \subset \mathbb{R}$, и нека је функција $F(x)$ диференцијабилна на том интервалу. Функцију $F(x)$ називамо примитивна функција функције $f(x)$ ако је:

$$F'(x) = f(x), \text{ за } x \in (a, b).$$

Ако користимо диференцијал, ова једнакост је еквивалентна са:

$$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx.$$

Примјер 124

Функција $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 1$ је примитивна функција функције $f(x) = x^3 - x^2$, јер је

$$F'(x) = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot x^3 - \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^2 + 0 = x^3 - x^2 = f(x).$$

Једна функција може имати више примитивних функција. На примјер, примитивне функције функције $f(x) = 4x^3$ су $F(x) = x^4$, $F(x) = x^4 + 2$, $F(x) = x^4 - 1$. Примјећујемо да имамо бесконачно много примитивних функција, јер ако додамо било који реални број c на x^4, извод ће бити једнак $4x^3$. У општем случају вриједи сљедеће.

Теорема 5.1

Нека је $F(x)$ примитивна функција функције $f(x)$ на интервалу (a, b). Тада је и функција $F(x)+C$, гдје је C произвољна константа, примитивна функција функције $f(x)$ на (a, b).

Доказ. Пошто је $F(x)$ примитивна функција функције $f(x)$, имамо да је

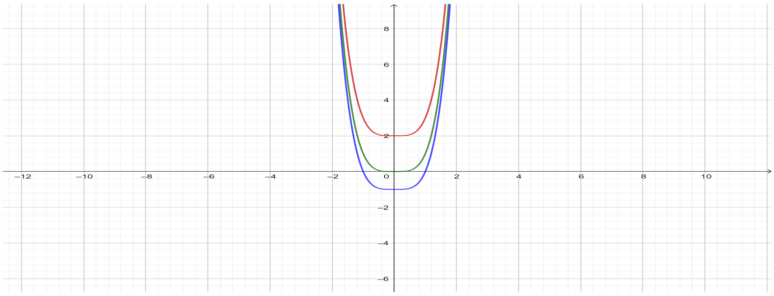
$$F'(x) = f(x).$$

Сада налазимо извод функције $F(x) + C$.

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x).$$

Дакле, $F(x) + C$ је примитивна функција функције $f(x)$. □

На доњој слици можемо видјети графике три примитивне функције функције $f(x) = 4x^3$.



Фамилију свих примитивних функција функције $f(x)$ означавамо са:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

и називамо неодређени интеграл од $f(x)$. $f(x)$ називамо подинтегрална функција или интегранд, док диференцијал dx одређује промјенљиву по којој вршимо интеграцију, у овом случају x. Дакле, за произвољну диференцијабилну функцију $F(x)$, имамо

$$\int F'(x)dx = F(x) + C,$$

односно

$$\int \frac{dF}{dx}dx = F(x) + C.$$

Теорема 5.2

Неодређени интеграли задовољавају сљедеће особине:

1. Нека је $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Вриједи

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

2. Ако су дефинисани интеграли $\int f_i(x)dx$, $i \in \{1, 2, \ldots n\}$, онда

je

$$\int (f_1 \pm f_2 \pm \ldots \pm f_n)dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int f_n(x)dx.$$

3. Нека је $\int f(t)dt = F(t) + C$. Онда је

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Доказ. Доказаћемо особину 3. Ставимо да је

$$ax + b = t,$$

онда је

$$t' = \frac{dt}{dx} = a.$$

Пошто је

$$\frac{dF(t)}{dt} = F'(t) = f(t),$$

$$\frac{d}{dt}F(ax+b) = a \cdot F'(ax+b) = a \cdot f(ax+b),$$

имамо да је

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{a}F(ax+b)\right) = \frac{1}{a} \cdot a \cdot F'(ax+b) = F'(ax+b) = f(ax+b). \quad \square$$

Навешћемо сада интеграле неких елементарних функција, са којима се најчешће сусрећемо у економији:

$$\int k dx = kx + C, \ k \in \mathbb{R};$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \ n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\int \frac{1}{x}dx = ln|x| + C;$$

$$\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C,\ k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a};\ a > 0,\ a \neq 1.$$

Директном интеграцијом ћемо наћи сљедећи интеграл.

Примјер 125

$$\int \left(\frac{x^4 - 3x^2 + x}{x^2}\right)dx = \int \left(x^2 - 3 + \frac{1}{x}\right)dx = \frac{x^3}{3} - 3x + \ln|x| + C.$$

Примјер 126

Маргинални трошак је дат са $MT(q) = 3q^2 - 60q + 400$, гдје q представља количину производње. Укупни трошак за производњу два артикла неког производа је 900 КМ. Наћи ћемо укупни трошак за производњу пет артикала.
Знамо да је маргинални трошак једнак изводу функције укупног трошка $T(q)$. Значи,

$$\frac{dT}{dq} = 3q^2 - 60q + 400.$$

Сада налазимо интеграл функције маргиналног трошка, да бисмо нашли функцију $T(q)$.

$$T(q) = \int \frac{dT}{dq}dq = \int (3q^2 - 60q + 400)dq = q^3 - 30q^2 + 400q + C.$$

Одредићемо константу C из услова да је $T(2) = 900$:

$$2^3 - 30 \cdot 2^2 + 400 \cdot 2 + C = 900 \Rightarrow C = 212.$$

То значи да је функција трошка једнака $T(q) = q^3 - 30q^2 + 400q + 212$. За $q = 5$, $T(5) = 1587$. Дакле, трошак за производњу пет артикала износи 1587 КМ.

5.0.1 Задаци за вјежбање

1. Наћи сљедеће неодређене интеграле:
   (а) $\int \frac{x-5}{x^5} dx$;
   (б) $\int (\sqrt{x^3} - 3\sqrt{x^5} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{x}) dx$;
   (в) $\int (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})^2 dx$;
   (г) $\int 2^x 8^x dx$.

2. Нека су маргинални трошкови и маргинални приходи предузећа дати са $MT(q) = 2e^q$ и $MP(q) = 28q - e^q$, редом. Ако фиксни трошкови и фиксни приходи износе 90 и 100, редом, одредити функције трошкова и прихода.

5.1 Интеграција методом смјене

Претпоставимо да треба да нађемо интеграл $\int 2xe^{x^2} dx$. У овом случају можемо посматрати x^2 као нову промјенљиву u, $u = x^2$. Ако нађемо извод $\frac{du}{dx} = 2x$, имамо да је $du = 2xdx$. Сада почетни интеграл можемо написати као $\int e^u du$, и примијенити дефиницију неодређеног интеграла, тако да је $\int e^u du = e^u + C$. На крају замијенимо $u = x^2$, тада је $\int 2xe^{x^2} dx = e^{x^2} + c$. Ово је био примјер кориштења методе смјене у налажењу интеграла.
У општем случају имамо сљедеће:

Теорема 5.3

Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрекидна подинтегрална функција, и нека је смјена дата са $x = g(t)$, при чему су $g(t)$ и $g'(t)$ непрекидне функције. Тада је

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt.$$

Дакле, ако хоћемо да нађемо интеграл $\int f(x)dx$ методом смјене, треба да урадимо сљедеће кораке:
(1) У функцији $f(x)$ треба да препознамо два дијела, један је нова функција $u(x)$, а други је диференцијал функције $u(x)$, $du = u'(x)dx$.
(2) Добијени интеграл треба да буде у облику

$$\int f(x)dx = \int g(u)du,$$

а затим наћи интеграл налажењем примитивне функције $G(u)$ од функције $g(u)$.
(3) Замијенити u са $u(x)$ у функцији $G(u)$, и добити примитивну функцију $G(u(x))$ од функције $f(x)$, тако да је

$$\int f(x)dx = G(u(x)) + C.$$

Примјер 127

Да бисмо нашли интеграл $\int (4x^3+7)^{12}x^2dx$, увешћемо смјену $u(x) = 4x^3 + 7$. Тада је $u'(x) = 12x^2$, односно $du = 12x^2dx$. Значи да је

$x^2dx = \frac{du}{12}$. Интеграл сада постаје

$$\int u^{12}\frac{du}{12} = \frac{1}{12}\int u^{12}du = \frac{1}{12}\frac{u^{13}}{13} + C = \frac{(4x^3+7)^{13}}{156} + C.$$

Примјер 128

Нека је дат интеграл $\int \sqrt{2x-3}dx$. Увешћемо смјену $2x-3=u$, $2dx = du$, односно $dx = \frac{du}{2}$. Имамо

$$\int \sqrt{2x-3}dx = \int \sqrt{u}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}(2x-3)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Примјер 129

$$\int \frac{x^2}{x^3+1}dx = [u = x^3+1, du = 3x^2dx] = \frac{1}{3}\int\frac{du}{u}$$
$$= \frac{1}{3}\ln|u| + C = \frac{1}{3}\ln|x^3+1| + C.$$

Примјер 130

Нека је стопа промјене цијене p (у КМ) неког производа дата са

$$\frac{dp}{dx} = \frac{-135x}{\sqrt{9+x^2}},$$

при чему је са x означена потражња за тим производом (у хиљадама). Претпоставимо да ако је цијена 30 КМ, потражња је $x = 4$. Цијену $p(x)$ ћемо наћи интеграцијом функције првог извода $p'(x)$

по промјенљивој x. Увешћемо смјену

$$u = 9 + x^2,\ du = 2xdx,\ xdx = \frac{1}{2}du.$$

Добијамо,

$$\begin{aligned} p(x) &= \int \frac{-135x}{\sqrt{9+x^2}}dx = \int \frac{-135}{u^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{2}du = \frac{-135}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du \\ &= \frac{-135}{2}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) + C = -135\sqrt{9+x^2} + C. \end{aligned}$$

Када је $x = 4$, имамо да је

$$30 = -135\sqrt{9+4^2} + C,$$

односно

$$C = 30 + 135\sqrt{25} = 705.$$

Дакле, функција цијене је $p(x) = -135\sqrt{9+x^2} + 705$.

5.1.1 Задаци за вјежбање

1. Наћи интеграле:

   (а) $\int[(x-1)^5 + 3(x-1)^2 + 5]dx$;

   (б) $\int \frac{2x^4}{x^5+1}dx$;

   (в) $\int \frac{1}{1+e^{-x}}dx$;

   (г) $\int \frac{3x^2+1}{\sqrt[3]{x^3+x}}dx$;

   (д) $\int xe^{\frac{x^2}{2}}dx$;

   (ђ) $\int \frac{dx}{x\ln x}$.

2. Претпоставимо да ће за t седмица цијена пилетине расти по стопи од $p'(t) = 3\sqrt{t+1}$ фенинга по килограму по седмици. Ако

је тренутна цијена пилетине 4.30 КМ по килограму, колика ће цијена бити након осам седмица?

3. Када је машина стара t година, брзина промјене њене вриједности је $-720e^{-\frac{t}{5}}$ конвертибилних марака по години. Ако је нова машина купљена за 6000 КМ, колико ће она вриједити након 10 година?

4. Ако је функција граничних прихода дата са $GP(q) = \frac{2q+1}{q+5}$, и ако је укупни приход 16 на нивоу производње 5, одредити функцију укупних прихода.

5.2 Парцијална интеграција

Ако се у подинтегралној функцији налази производ двије функције, тако да ниједна смјена не даје резултат, онда примјењујемо парцијалну интеграцију. Идеја је да се производ двије функције замијени производом извода једне и интегралом друге функције. Прецизно, имамо:

Теорема 5.4

Нека су функције f и g диференцијабилне на интервалу (a, b), тада вриједи

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx.$$

Примјер 131

$$\int (2x-1)e^{4x}dx = \left| \begin{array}{c} u = 2x-1 \\ du = 2dx \\ dv = e^{4x}dx \\ v = \int e^{4x}dx = \frac{1}{4}e^{4x}dx \end{array} \right| = uv - \int vdu =$$

$$= (2x-1)\frac{1}{4}e^{4x} - \frac{2}{4}\int e^{4x}dx = \frac{2x-1}{4}e^{4x} - \frac{1}{8}e^{4x} + C.$$

Примјер 132

$$\int x^3 \ln 2x dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln 2x \\ du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^3dx \\ v = \frac{1}{4}x^4 \end{array} \right| = (\ln 2x)\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}\int \frac{x^4}{x}dx =$$

$$= \frac{x^4 \ln 2x}{4} - \frac{x^4}{16} + C, \; x > 0.$$

Примјер 133

Нека је функција граничних трошкова дата са $GT(q) = \ln q$, као функција производње q. Ако су укупни трошкови по јединици производње 2, наћи функцију укупних трошкова.
Рјешење. Функцију укупних трошкова, $T(q)$, налазимо парцијалном интеграцијом:

$$T(q) = \int \ln q dq = \left| \begin{array}{c} u = \ln q \\ du = \frac{dq}{q} \\ dv = dq \\ v = q \end{array} \right| = q \ln q - \int q \frac{dq}{q} = q \ln q - q + C.$$

Због претпоставке да су трошкови по јединици производње 2, имамо да је $T(1) = 2$. Дакле,

$$2 = T(1) = -1 + C.$$

Одавде слиједи да је $C = 3$. Значи, функција укупних трошкова је

$$T(q) = q \ln q - q + 3.$$

Примјетимо да овдје не стављамо q у апсолутну вриједност, јер се ради о економској величини (количина производње је увијек ненегативна величина).

5.2.1 Задаци за вјежбање

1. Наћи интеграле:

   (а) $\int x^2 e^x dx$;

   (б) $\int \frac{x}{e^x} dx$;

   (в) $\int \sqrt{x} \ln x dx$;

   (г) $\int x^2 e^{-3x} dx$.

2. Нека су функције граничних трошкова и потражње дате са $GT(q) = (2q+1)e^q - \frac{1}{q^2}$ и $q(p) = \frac{1-p}{4}$, редом. Промјенљиве q и p означавају количину производње и цијену, редом. Ако су укупни трошкови по јединици производње 3, наћи функцију добити.

3. Брзина промјене продуктивности радника послије t сати рада износи $200te^{-0.4t}$ јединица неког артикла по сату. Колико јединица артикла може тај радник произвести у прва 3 сата, ако у првом сату рада произведе $100e^{-2}$ јединица артикла?

5.3 Интеграција рационалних функција

Поред методе смјене, код налажења интеграла рационалних функција често користимо и трансформације алгебарских израза, као што су: претварање квадратног тринома у бином, растављање разломка на просте парцијалне разломке, дијељење бројиоца са имениоцем и слично.
У сљедећем примјеру ћемо показати како налазимо интеграл рационалне функције у чијем имениоцу је квадратни трином који се може раставити на линеарне факторе.

Примјер 134

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1-x^2} &= \int \frac{dx}{(1-x)(1+x)} \\
&= \left| \begin{array}{c} \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} = \frac{(A-B)x+(A+B)}{(1-x)(1+x)} \Rightarrow \\ \begin{cases} A-B=0 \\ A+B=1 \end{cases} \Rightarrow A = B = \frac{1}{2} \end{array} \right| \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x} = -\frac{1}{2}\ln|1-x| + \frac{1}{2}\ln|1+x| + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C.
\end{aligned}$$

У случају да у имениоцу подиинтегралне функције имамо n $(n \geq 2)$ истих линеарних фактора, морамо функцију раставити на n разломака. То показујемо у сљедећем примјеру.

Примјер 135

$$\int \frac{x^2+1}{x^4-x^3}dx = \int \frac{x^2+1}{x^3(x-1)}dx =$$

$$\left| \begin{array}{c} \frac{x^2+1}{x^3(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-1} = \\ \frac{(A+D)x^3+(-A+B)x^2+(-B+C)x-C}{x^3(x-1)} \Rightarrow \\ \begin{cases} A+D=0 \\ -A+B=1 \\ -B+C=0 \\ -C=1 \end{cases} \Rightarrow A=-2,\ B=-1,\ C=-1,\ D=2 \end{array} \right| =$$

$$-2\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^3} + 2\int \frac{dx}{x-1} =$$

$$-2\ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + 2\ln|x-1| + C.$$

Уколико се у имениоцу подинтегралне функције налази полином степена 2, поступамо на сљедећи начин.

Примјер 136

$$\int \frac{x^3-x}{(x^2+1)^2}dx =$$

$$\left| \begin{array}{c} \frac{x^3-x}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax^3+Bx^2+(A+C)x+(B+D)}{(x^2+1)^2} \Rightarrow \\ \begin{cases} A=1 \\ B=0 \\ A+C=-1 \\ B+D=0 \end{cases} \Rightarrow C=-2,\ D=0 \end{array} \right| =$$

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx - 2\int \frac{x}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{x^2+1} + C.$$

5.3.1 Задаци за вјежбање

1. Наћи интеграле:

   (а) $\int \frac{x}{x^2+5x+6}dx$;

   (б) $\int \frac{x^2+3x+3}{x(x+2)^2}dx$;

   (в) $\int \frac{dx}{x(1+x^2)^2}$;

   (г) $\int \frac{x^3}{(x-1)(x^2-4)}dx$;

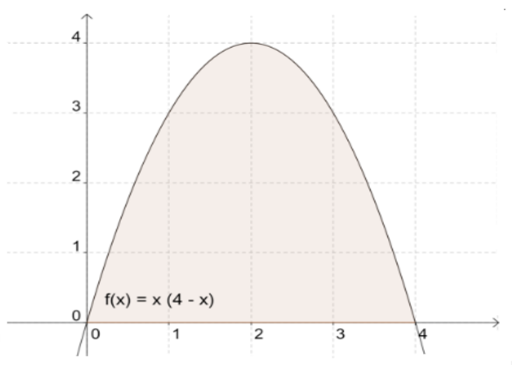
   (д) $\int \frac{2x^4-x^3-5x^2-3x+10}{x^3-x^2-4x+4}dx$;

   (ђ) $\int \frac{3x^2-2x-4}{(x-1)(x^2-4)}dx$.

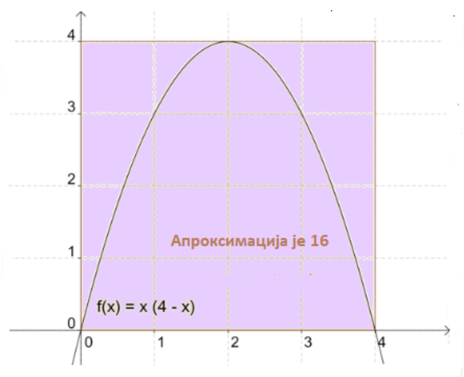
2. Нека је функција граничних трошкова дата са $GT(q) = \frac{q}{q^2+3q+2}$, гдје је q количина производње. Ако су укупни трошкови на нивоу производње 2 јединице робе $\ln 16$ конвертибилних марака, колики су укупни трошкови за првих 8 јединица робе?

5.4 Одређени интеграли

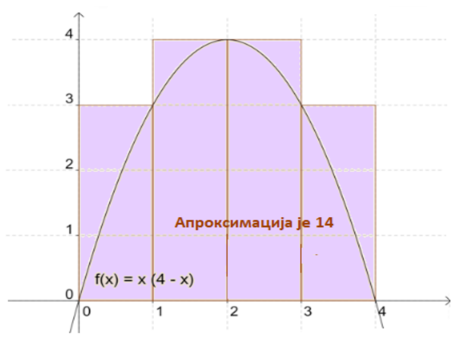
Претпоставимо да желимо наћи површину фигуре ограничене кривом $y = x(4-x)$, између правих $x = 0$ и $x = 4$. Ситуација је приказана на слици испод.



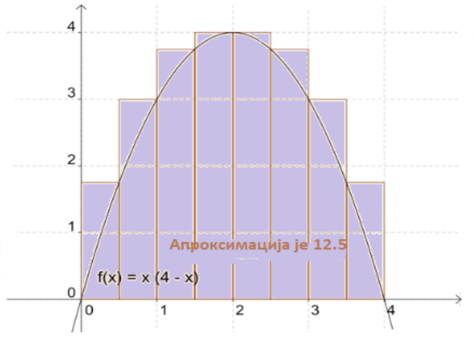
Пошто немамо одговарајућу геометријску формулу за израчунавање ове површине, једини начин да то урадимо је апроксимацијом површи. Најједноставније је апроксимирати површину са површином квадрата странице 4, као што је приказано на доњој слици.



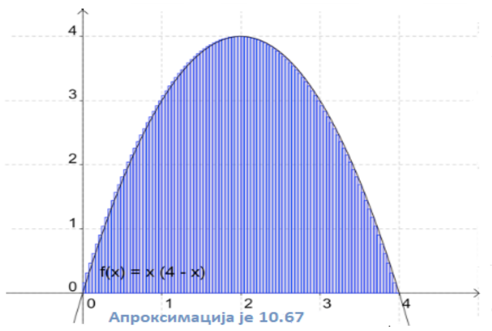
Побољшану апроксимацију ћемо добити ако подијелимо интервал $[0, 4]$ на 4 једнака подинтервала, а затим саберемо површине четири правоугаоника приказаних на сљедећој слици.



Слично имамо ако ако подијелимо интервал $[0, 4]$ на 8 једнаких подинтервала:



На крају ћемо приказати апроксимацију површине када је интервал $[0, 4]$ подијељен на 100 једнаких подинтервала:



У општем случају, нека требамо наћи површину фигуре ограничене са графиком функције $y = f(x)$, на неком интервалу $[a, b]$. Дијељењем интервала на n једнаких подинтервала, површину апроксимирамо са Римановом интегралном сумом

$$R = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x,$$

при чему је $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ дужина подинтервала, $x_i = a + i\Delta x$, $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2 \ldots n$.

На основу свега реченог, можемо увести појам одређеног интеграла функције $y = f(x)$ на интервалу $[a, b]$, у ознаци $\int_a^b f(x)dx$, као:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

Напомињемо да је овдје функција $y = f(x)$ Риман-интеграбилна. Више о Риман-интеграбилности заинтересовани читаоци могу наћи у [3], [9]. Сљедећа теорема (Њутн-Лајбницова формула) нам даје поступак за рачунање одређеног интеграла.

Теорема 5.5

Нека је $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрекидна функција и нека је $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ било која њена примитивна функција. Тада је

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Примјер 137

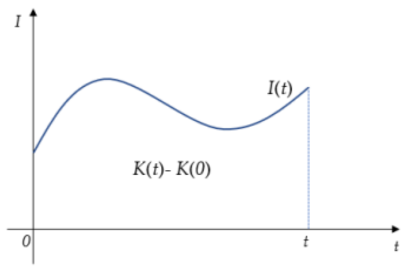
$$\int_1^2 \frac{x-4}{x^3}dx = \left| \int \tfrac{x-4}{x^3}dx = \int \tfrac{1}{x^2}dx - 4\int \tfrac{dx}{x^3} = -\tfrac{1}{x} + \tfrac{2}{x^2} \right| =$$
$$\left(-\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)\Big|_1^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{4}\right) - \left(-\frac{1}{1} + \frac{2}{1}\right) = -1.$$

Неке примјене у економији. Ако процес увећања капитала пратимо непрекидно у времену t, тада капитал можемо изразити као функцију од t, $K(t)$. Стопа увећања капитала у тренутку t, $\frac{dK}{dt}$, је једнака стопи нето инвестиција која се мијења у времену t, $I(t)$. За одређивање функције капитала на неком интервалу $[0, t]$ користимо

Њутн-Лајбницову формулу:

$$\int_0^t I(t)dt = K(t) - K(0) \Rightarrow K(t) = \int_0^t I(t)dt + K(0),$$

при чему је $K(0)$ почетна вриједност капитала.
У геометријском смислу, капитал је површина испод графика функције инвестиција:



Примјер 138

Нека је стопа инвестиција дата са функцијом $I(t) = 12t^{\frac{1}{3}}$ и нека је почетни капитал 25. Наћи функцију капитала, $K(t)$, и количину акумулираног капитала на интервалу $[0, 1]$.
Рјешење.

$$K(t) = 25 + \int_0^1 12t^{\frac{1}{3}} = 25 + 9t^{\frac{4}{3}}.$$

Количину акумулираног капитала на интервалу $[0, 1]$ добијамо као

$$K(1) = 25 + 9 \cdot 1^{\frac{4}{3}} = 34.$$

5.4.1 Задаци за вјежбање

1. (а) $\int_0^1 (x^2 - 3x + 4)dx$;

   (б) $\int_0^4 (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})dx$;

   (в) $\int_0^4 \frac{x}{x+3}dx$;

   (г) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$;

   (д) $\int_{-2}^2 xe^{-x}dx$.

2. Одредити површину фигуре ограничене са линијама $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 2$ и $x = 0$.

3. Одредити површину фигуре ограничене са линијама $y = x^3$ и $y = x^2$.

4. Нека је стопа инвестиција дата са функцијом $I(t) = 2t^{\frac{2}{3}}$. Одредити количину акумулираног капитала од краја прве до краја осме године.

5. Нека је функција граничних трошкова дата са $GT(q) = 3(q - 4)^2$, гдје је q количина производње. За колико ће се повећати укупни трошкови ако се количина производње повећа са 6 на 10 јединица?

Библиографија

[1] H. Bader, S. Fröhlich, *Математика за економисте*, Рад, Београд, 1980.

[2] R. Barnett, M. Ziegler, K. Byleen, *Примијењена математика*, MATE, Загреб, 2006.

[3] M. L. Bittinger, D. J. Ellenbergen, S. A. Surgent, *Calculus and its Application*, Tenth edition, Adison-Wesley, 2012.

[4] Б. Ивановић, *Математика за економисте*, Научна књига, Београд, 1973.

[5] F. A. Ieskarov, H. Ersel, D. Piontkovski, *Linear Algebra for Economists*, Springer, 2011.

[6] С. Курепа, *Увод у математику*, Техничка књига, Загреб, 1984.

[7] Б. Лучић, *Математика*, Завод за уџбенике и наставна средства, Источно Сарајево, 2006.

[8] Б. Лучић, Љ. Пејић, *Збирка задатака из математике за економисте I*, Економски факултет Сарајево, Сарајево, 2005.

[9] С. Максимовић, *Диференцијални и интегрални рачун 1*, Архитектонско-грађевинско-геодетски факултет, Бања Лука, 2022.

[11] M. Rosser, *Basic Mathematics for Economists*, Second edition, Routledge, London and New York, 2003.

[12] Љ. Смајловић, А. Фако, *Математика за економисте*, Економски факултет Сарајево, Сарајево, 2010.

[13] Н. Скакић, Р. Краварушић, *Математика*, Економски факултет Универзитета у Бањој Луци, Бања Лука, 2006.

[14] Љ. Смајловић, А. Фако, *Збирка задатака из математике за економисте II*, Економски факултет Сарајево, Сарајево, 2005.

[15] L.D. Hoffmann, G.L. Bradley, *Calculus for Business, Economics, and the Social and Life Scinces*, Fifth Edition, McGraw-Hill, Inc., New York, 1992.

[16] A. C. Chiang, *Основне методе математичке економије*, MATE, Загреб, 1994.