Vježbe uz kolegij Matematika

Sadržaj

Poglavlje 1

LINEARNA ALGEBRA

Motivacijski primjer 1.1. *Promatramo lanac od četiri dućana,* B_1*,* B_2*,* B_3 *i* B_4*. Svaki od njih prodaje osam vrsta robe,* $V_1, \ldots, V_8$*. Neka* a_{ij} *označava ukupnu prodaju robe* V_i *u dućanu* B_j *u određenom mjesecu, izraženu u \$. Prikladan način za prikazivanje ovih podataka je matrica formata* 8×4*. Npr. matrica A:*

$$A = \begin{array}{c c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{81} & a_{82} & a_{83} & a_{84} \end{bmatrix} & \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{matrix} & \end{array}$$

U matrici A retci predstavljaju vrstu robe, a stupci dućane.

Kako bismo interpretirali da je $a_{73} = 225$?
Odgovor: Prodaja robe V_7 u dućanu B_3 iznosi 225\$ za taj određeni mjesec.

1.1 Uvod i pojam matrice

Matrica je pravokutna shema brojeva, parametara, funkcija ili varijabli, a članovi te sheme nazivaju se elementima matrice.

$$A = \left.\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{n}\right\} m$$

A je primjer matrice s m redaka i n stupaca. Kažemo da je A formata $m \times n$. Koristimo i oznake $A_{m\times n}$, $A(m,n)$ ili zapisujemo $A = [a_{ij}], i = 1,\ldots,m, \quad j = 1,\ldots,n$.

Primjer 1.2. *Ispišite matricu A formata 3×2 čiji su elementi $a_{ij} = i + j$.*

Rješenje. Matrica A je formata 3×2, što znači da se sastoji od 3 retka i 2 stupca. Stoga i poprima vrijednosti 1, 2 i 3, a j poprima vrijednosti 1 i 2, tj. $i = 1,2,3, \quad j = 1,2$. Sada računamo elemente matrice:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1+1 = 2, \quad a_{12} = 1+2 = 3 \\ a_{21} &= 2+1 = 3, \quad a_{22} = 2+2 = 4 \\ a_{31} &= 3+1 = 4, \quad a_{32} = 3+2 = 5 \end{aligned}$$

Tražena matrica je:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

□

DZ 1.3. *Ispišite matricu $A = [a_{ij}]$ t.d. $a_{ij} = (i-j)^2, \quad i = 1,2, \quad j = 1,2,3$.*

Rješenje.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2 Tipovi matrica

- **kvadratna**: Vrijedi $m = n$, označavamo ju s A_n.
  Pr.

$$A \in M_3, \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & \sqrt{3} \\ 2 & -0.5 & 0.3 \\ 3 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

- **dijagonalna**: Vrijedi $A \in M_n$ i $a_{ij} = 0, i \neq j$.
  Pr.

$$A \in M_2, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$
$$B \in M_2, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$C \in M_3, \quad C = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

- **skalarna**: Vrijedi: A je dijagonalna i svi elementi na glavnoj dijagonali su joj jednaki.
  Pr.

$$A \in M_2, \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

- **jedinična**: Dijagonalna i svi elementi na glavnoj dijagonali su joj jednaki 1. Jedinična matrica formata $n \times n$ (ili reda n) označava se s I_n.
  Pr.

$$I_1 \in M_1, \quad I_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} = 1 \in \mathbb{R}$$
$$I_2 \in M_2, \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$I_3 \in M_3, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$I_n \in M_n, \quad I_n = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{n} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}\right\} n$$

Napomena: Vrijedi $A_n \cdot I_n = I_n \cdot A_n = A_n, \forall A_n \in M_n$.

- **nul matrica**: $A_{m \times n}$ za koju vrijedi $a_{ij} = 0, \quad i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Pr.

$$O_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$O_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadatak 1.4. *Odredite parametre $x, y \in \mathbb{R}$ takve da matrice A i B budu jednake ako su:*

a) $A = \begin{bmatrix} x+3 & 4 \\ 1 & 2y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2x & 4 \\ 1 & 1+y \end{bmatrix},$

b) $A = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 2y & 0 \\ -y & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & x & -y \\ 0 & y & 2y \end{bmatrix}.$

Rješenje. a)

$$\begin{aligned} &A, B \in M_2 \\ &x+3 = -2x \Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow \underline{x = -1} \\ &1 = 1 \\ &4 = 4 \\ &2y = 1 + y \Rightarrow \underline{y = 1} \end{aligned}$$

b) $A \in M_{32}, B \in M_{23} \Rightarrow$ matrice nisu usporedive.

□

Zadatak 1.5. *Odredite parametre $a, b \in \mathbb{R}$ takve da je $A + 2B = \frac{1}{2}C$, ako su*

$$A = \begin{bmatrix} 2a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
A+2B &= \begin{bmatrix} 2a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} + 2\cdot \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2b & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 2a+2b & 1 \\ 0 & a+2 \end{bmatrix} \\
\frac{1}{2}C &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Izjednačavanjem odgovarajućih elemenata dobivamo:

$$\begin{aligned}
2a+2b &= 2 \\
1 &= 1 \\
0 &= 0 \\
a+2 &= 2 \Rightarrow \underline{a=0} \Rightarrow \underline{b=1}
\end{aligned}$$

$\square$

Zadatak 1.6. *Odredite parametre $x,\ y \in \mathbb{R}$ takve da je*

$$\begin{bmatrix} x & y & y \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.
Prvo, primijetimo da matrice možemo množiti:

$$(2\times 3)\cdot(3\times 2) = (2\times 2).$$

$$\begin{bmatrix} x & y & y \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y+2y & 2x+y+y \\ 1+1+4 & 2+1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+3y & 2x+2y \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Izjednačavanjem odgovarajućih elemenata dobivamo:

$$\begin{aligned} x+3y &= -1 \qquad / \cdot (-2) \\ 2x+2y &= 2 \\ 6 &= 6 \quad \checkmark \\ 5 &= 5 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x-6y &= 2 \\ 2x+2y &= 2 \end{aligned}$$

$$-4y = 4 \quad \Rightarrow \quad \underline{y=-1}$$

$$x = -1-3y = -1+3 \quad \Rightarrow \quad \underline{x=2}.$$

□

DZ 1.7. *Odredite parametre $x,\ y \in \mathbb{R}$ takve da je*

$$\begin{bmatrix} 3 & y \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

$$x = 6, \quad y = 0$$

Zadatak 1.8. *Odredite parametre $x,\ y \in \mathbb{R}$ takve da su matrice A i B komutativne s obzirom na množenje, ako su*

$$A = \begin{bmatrix} x & 2y \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

$$AB = BA$$

$$AB = \begin{bmatrix} x & 2y \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y & 6y \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & 2y \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 2y \\ x+9 & 2y+3 \end{bmatrix}$$

Izjednačavanjem elemenata dobivamo:

$$\begin{aligned} x + 2y &= x \\ 6y &= 2y \quad \Rightarrow \quad \underline{y = 0} \\ 4 &= x + 9 \quad \Rightarrow \quad \underline{x = -5} \\ 3 &= 2y + 3 \end{aligned}$$

$\square$

Napomena: Općenito je $AB \neq BA$!

DZ 1.9. *Pokažite da matrice A i B nisu komutativne:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Provjerimo da je $AB \neq BA$.

Zadatak 1.10. *Riješite matričnu jednadžbu AXB=C, ako je*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

$$\underset{(2\times 2)}{A} \quad \underset{(2\times 1)}{X} \quad \underset{(1\times 2)}{B} \quad = \quad \underset{(2\times 2)}{C} \qquad \Rightarrow \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & = & 0 & \\ 3x_1 & + & 6x_2 & = & 0 & \checkmark \\ x_1 & & & = & -2 & \\ 3x_1 & & & = & -6 & \checkmark \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{rcl} -2 + 2x_2 & = & 0 \\ 2x_2 & = & 2 \\ x_2 & = & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\square$

DZ 1.11. *Pokažite da je* $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *inverz matrice* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *tj. da vrijedi* $B = A^{-1}$.

Rješenje. Provjerimo da vrijedi $AB = BA = I$. Tada je $B = A^{-1}$.

Napomena: Inverz dijagonalne matrice:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}, \quad D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & & & \\ & \frac{1}{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{d_n} \end{bmatrix}.$$

Pr.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.3 Transponirane i simetrične matrice

◇ **Transponiranje matrice**

Pr.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2 \times 3 \quad \Rightarrow \quad 3 \times 2$$

Pr.

$$X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad X^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X \in M_{31} \quad \Rightarrow \quad X^T \in M_{13}$$

(vektor stupac) (vektor redak)

◇ **Simetrična matrica**

($A \in M_n$ t.d. je $A^T = A$, tj. $a_{ji} = a_{ij}, \ \forall i, \ j$)

Pr.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & -5 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & -5 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

◇ **Antisimetrična matrica**

($A \in M_n$ t.d. je $A^T = -A$, tj. $a_{ji} = -a_{ij}$, $\forall i,\ j$)
(Napomena: elementi na dijagonali su jednaki 0.)

Pr.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadatak 1.12. *Izračunajte* $A \cdot A^T$ *i* $A^T \cdot A$*, ako je* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Rješenje.

$$\underset{4\times 1}{A} \cdot \underset{1\times 4}{A^T} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \underset{4\times 4}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 9 \end{bmatrix}} \Rightarrow \text{Simetrična!}$$

$$\underset{1\times 4}{A^T} \cdot \underset{4\times 1}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \underset{1\times 1}{[14] = 14} \Rightarrow \text{Simetrična!}$$

□

Zadatak 1.13. *Za koje je vrijednosti parametara* $x,\ y \in \mathbb{R}$ *matrica* AB *simetrična, ako su*

$$A = \begin{bmatrix} x & y & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & x & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}?$$

Rješenje.

$$AB = \begin{bmatrix} -x+3y & 2x & -y \\ -2 & 20 & 4 \\ 3x & 4 & -x+1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -2 = 2x \quad & \Rightarrow \underline{x = -1} \\ 3x = -y \quad & \Rightarrow \underline{y} = \ -3x \underline{= \ 3} \\ 4 = 4 \quad & \checkmark \end{aligned}$$

□

Zadatak 1.14. *Ispišite sve elemente matrice A tako da ona bude antisimetrična.*

$$A = \begin{bmatrix} . & . & . \\ a & . & -1 \\ \sqrt{3} & . & . \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Rješenje.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a & -\sqrt{3} \\ a & 0 & -1 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

□

Zadatak 1.15. *Ako su dane matrice A i B,*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

izračunajte $2A + B \cdot A^T$.

Rješenje.
Uočimo, $A^T = -A$, $B = 2 \cdot I$, pa je

$$\begin{aligned} 2A + B \cdot A^T &= 2A + 2I \cdot (-A) = \\ &= 2A - 2I \cdot A = \\ &= 2A - 2A = 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

1.4 Vektorski prostor $\mathbb{R}^n$

Prisjetimo se, matrični prikaz vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ je prostor M_{1n}. Čini ga skup *uređenih n-torki realnih brojeva* sa definiranim operacijama **zbrajanja** i **množenja skalarom**.
Te n-torke nazivamo *vektorima.*

1.4.1 Vektori, operacije, linearna kombinacija

Zadatak 1.16. *Zadani su vektori* $a = (1, 2, 2),\ b = (0, 0, 3),\ c = (-2, 4, -3)$. *Izračunaj* $a - 2b + 2c$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} a - 2b + 2c &= (1, 2, 2) - 2 \cdot (0, 0, -3) + 2 \cdot (-2, 4, -3) = \\ &= (1, 2, 2) - (0, 0, -6) + (-4, 8, -6) = \\ &= (1, 2, 2) + (0, 0, 6) + (-4, 8, -6) = (-3, 10, -10) \end{aligned}$$

$\square$

Zadatak 1.17. *Ako je* $3 \cdot (x, y, z) + 5 \cdot (-1, 2, 3) = (4, 1, 3)$, *nađite* $x,\ y,\ z$.

Rješenje.

$$(3x, 3y, 3z) + (-5, 10, 15) = (3x - 5, 3y + 10, 3z + 15) = (4, 1, 3)$$

$$\begin{array}{lll} 3x - 5 = 4 & \Rightarrow 3x = 9 & \Rightarrow \underline{x = 3} \\ 3y + 10 = 1 & \Rightarrow 3y = -9 & \Rightarrow \underline{y = -3} \\ 3z + 15 = 3 & \Rightarrow 3z = -12 & \Rightarrow \underline{\underline{z = -4}} \end{array}$$

$\square$

Zadatak 1.18. *Izrazite vektor* $(4, -11)$ *kao linearnu kombinaciju vektora* $(2, -1)$ *i* $(1, 4)$.

Rješenje.

$$\alpha \cdot (2, -1) + \beta \cdot (1, 4) = (4, -11)$$
$$(2\alpha, -\alpha) + (\beta, 4\beta) = (4, -11)$$

$$\begin{array}{rcrcrll} 2\alpha & + & \beta & = & 4 & & \Rightarrow\ 2\alpha - 2 = 4 \\ -\alpha & + & 4\beta & = & -11 & / \cdot 2 & \qquad 2\alpha = 6\ \Rightarrow \underline{\alpha = 3} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcr} 2\alpha & + & \beta & = & 4 \\ -2\alpha & + & 8\beta & = & -22 \end{array}$$

$$9\beta = -18 \Rightarrow \underline{\beta = -2}$$

$\square$

Zadatak 1.19. *Odredite parametre* $x,\ y \in \mathbb{R}$ *tako da matrica* U *bude linearna kombinacija matrica* V *i* Z *sa skalarima* 2 *i* -1*, ako su*

$$U = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},\ V = \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ Z = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

$$\begin{array}{ccccccc} U & = & 2V & - & Z & & \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} & = & 2\begin{bmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & - & \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ -1 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 2x \\ 2-y \\ 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2x =& 1 \quad \Rightarrow \underline{x = \frac{1}{2}} \\ 2 - y =& 2 \quad \Rightarrow \underline{y = 0} \end{aligned}$$

□

1.4.2 Skalarni produkt vektora

Zadatak 1.20. *Nađite skalarni produkt vektora* a *i* b*, ako su* $a = (1, -2, 3)$*,* $b = (-3, 2, 5)$*.*

Rješenje.

$$a \cdot b = 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 5 = -3 - 4 + 15 = 8$$

□

Zadatak 1.21. *Osoba A kupila je 3 kg trešanja, 4 kg krušaka, 3 kg narandži i 5 kg jabuka. Osoba B je kupila 2 kg trešanja, 2 kg narandži, 4kg jabuka i nije kupila kruške.*
Neka 1 kg trešanja košta 0.75\$, krušaka 0.60\$, narandži 0.50\$ i jabuka 0.40\$.
Neka x_A *i* x_B *označavaju vektore kupnji redom osobe A i osobe B, a vektor* $p = (0.75, 0.60, 0.50, 0.40)$ *neka označava cijene.*
Koji je ukupni vektor kupnje osoba A i B zajedno? Koliko su skupa potrošili?

Rješenje.
Ukupni vektor kupnje:

$$\begin{array}{rcl} x_A + x_B &=& (\overset{\text{T}}{3}\ ,\ \overset{\text{N}}{4}\ ,\ \overset{\text{K}}{3}\ ,\ \overset{\text{J}}{5}) + (\overset{\text{T}}{2}\ ,\ \overset{\text{N}}{0}\ ,\ \overset{\text{K}}{2}\ ,\ \overset{\text{J}}{4}) \\ &=& (\ 5\ ,\ 4\ ,5\ ,\ 9\ ) \end{array}$$

Potrošnja:

$$\begin{aligned} p \cdot (x_A + x_B) &= (0.75, 0.60, 0.50, 0.40) \cdot (5, 4, 5, 9) \\ &= 0.75 \cdot 5 + 0.60 \cdot 4 + 0.50 \cdot 5 + 0.40 \cdot 9 \\ &= 12.25\$ \end{aligned}$$

$\square$

Zadatak 1.22. *Odredite vektor* $x = (-3, x_2, x_3)$ *koji je okomit na vektore* $a = (4, 3, 6),\ b = (2, 1, 4)$.

Rješenje.

$$\left.\begin{array}{ll} x \perp a & \Rightarrow a \cdot x = 0 \\ x \perp b & \Rightarrow b \cdot x = 0 \end{array}\right\} \text{okomitost vektora}$$

Rješavamo sustav:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 4 \cdot (-3) & + & 3x_2 & + & 6x_3 & = & 0 & \\ 2 \cdot (-3) & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 0 & \\ & & 3x_2 & + & 6x_3 & = & 12 & / : (-3) \\ & & x_2 & + & 4x_3 & = & 6 & \\ & & -x_2 & - & 2x_3 & = & -4 & \\ & & x_2 & + & 4x_3 & = & 6 & \\ & & & & 2x_3 & = & 2 & \Rightarrow \quad \underline{x_3 = 1} \\ & & & & & & & \underline{x_2 = 2} \end{array}$$

$$\Rightarrow x = (-3, 2, 1)$$

$\square$

Zadatak 1.23. *Poduzeće proizvodi ručne satove, budilice i zidne satove.*

Neka je

$$k = \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \\ 10 \end{bmatrix} \textit{ vektor prodanih količina,}$$

$$c = \begin{bmatrix} 120 \\ 50 \\ 150 \end{bmatrix} \textit{ vektor cijena (u EUR),}$$

$$t = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 25 \end{bmatrix} \textit{ vektor troškova po komadu (u EUR).}$$

a) Izračunajte i interpretirajte skalarni produkt $k \cdot c = k^T c$.
b) Izračunajte i interpretirajte $k \cdot t = k^T t$.
c) Interpretirajte $k \cdot (c - t) = k^T (c - t)$.
d) Je li poduzeće profitabilno?

Rješenje.

a)

$$k \cdot c = k^T c = [50\ 30\ 10] \begin{bmatrix} 120 \\ 50 \\ 150 \end{bmatrix} =$$
$$= 50 \cdot 120 + 30 \cdot 50 + 10 \cdot 150 = 9000$$

$\Rightarrow$ ukupni prihod poduzeća

b)

$$k^T t = [50\ 30\ 10] \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 25 \end{bmatrix} =$$
$$= 50 \cdot 20 + 30 \cdot 10 + 10 \cdot 25 = 1550$$

$\Rightarrow$ ukupni troškovi poduzeća

c)

$$k^T (c - t) = k^T c - k^T t = 7450 \qquad \Rightarrow \text{ukupna dobit poduzeća}$$

d) Poduzeće je profitabilno jer je $k^T (c - t) > 0$.

□

DZ 1.24 (Zadatak s testa).
Odredi sve matrice drugog reda koje komutiraju s matricom

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Uputa. Stavimo

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad AB = BA.$$

Dobivamo:

$$B = \begin{bmatrix} d - 2c & -2c \\ c & d \end{bmatrix}, \quad c,\ d \in \mathbb{R}.$$

DZ 1.25 (Zadatak s testa).
Riješite matričnu jednadžbu $AX - XB = C$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uputa. Stavimo

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

DZ 1.26 (Zadatak s testa).
Odredite vrijednost polinoma $P(x) = x^4 + 2x^2 - 3x - 8$ za matricu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Uputa. $P(A) = A^4 + 2A^2 - 3A - 8\underline{I}$, pri čemu je $A^2 = A \cdot A$; $A^4 = A^2 \cdot A^2$.

1.4.3 Linearna nezavisnost vektora

Zadatak 1.27. *Provjerite linearnu nezavisnost vektora:*

$$x = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.
Za $\alpha,\ \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ promatramo relaciju

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \quad 0$$

$$\alpha \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{lllllll} 6\alpha & & & & = & 0 & \Rightarrow \alpha = 0 \\ 2\alpha & + & 5\beta & & = & 0 & \Rightarrow \beta = 0 \\ 3\alpha & - & 3\beta & + \ 7\gamma & = & 0 & \Rightarrow \gamma = 0 \\ 4\alpha & + & \beta & - \ 2\gamma & = & 0\checkmark & \end{array}$$

Dakle, tzv. trivijalno rješenje je jedino rješenje ovog sustava, pa su vektori linearno nezavisni. □

Zadatak 1.28. *Prikažite vektor x kao linearnu kombinaciju vektora y i z, ako su $x = (-1, 1, 0),\ y = (2, -1, 1),\ z = (0, 2, 0)$.*

Rješenje.

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha & \cdot & y & + & \beta & \cdot & z & = & x \\ \alpha & \cdot & \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} & + & \beta & \cdot & \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcll} 2\alpha & & & = & -1 & \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2} \\ -\alpha & + & 2\beta & = & 1 & \\ \alpha & & & = & 0 & \Rightarrow \alpha = 0 \\ & & & & & \Longrightarrow\!\Longleftarrow \end{array}$$

Sustav nema rješenja, pa x ne možemo prikazati kao linearnu kombinaciju od y i z. □

Zadatak 1.29. *Je li moguće neki od vektora*

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

prikazati kao linearnu kombinaciju preostalih?

Rješenje.
To je moguće ako su vektori $x,\ y,\ z$ linearno zavisni.

$$\alpha x+\beta y+\gamma z = \ 0$$

$$\alpha\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}2\\-2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcrcll} \alpha & - & \beta & + & 2\gamma & = & 0 & \\ -2\alpha & & & - & 2\gamma & = & 0 & \Rightarrow \underline{\alpha=-\gamma}\\ \alpha & - & 2\beta & + & 3\gamma & = & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcrcll} - & \beta & + & \gamma & = & 0 & \Rightarrow \underline{\beta=\gamma,\quad \gamma\in\mathbb{R}} \\ - & 2\beta & + & 2\gamma & = & 0 & \checkmark \end{array}$$

Sustav ima beskonačno rješenja, pa su vektori linearno zavisni, dakle, moguće je jedan od njih prikazati kao linearnu kombinaciju preostalih. ☐

Zadatak 1.30. *Odredite parametar $t\in\mathbb{R}$ takav da su vektori $x,\ y,\ z$ linearno nezavisni, ako su $x=(0,2,0),\ y=(-1,0,t),\ z=(2,0,1)$.*

Rješenje.
Želimo da relacija

$$\alpha x+\beta y+\gamma z = \ 0$$

$$\alpha\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}-1\\0\\t\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

bude zadovoljena samo za $\alpha=\beta=\gamma=0$.

$$\begin{array}{rcrcrcll} & - & \beta & + & 2\gamma & = & 0 & \\ 2\alpha & & & & & = & 0 & \Rightarrow \underline{\alpha=0}\\ & & \beta t & + & \gamma & = & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrcrcll} & - & \beta & + & 2\gamma & = & 0 & \Rightarrow \underline{\gamma=\frac{\beta}{2}} \\ + & & t\beta & + & \gamma & = & 0 & /\cdot(-2) \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} -2\beta t-\beta &= 0\\ \beta(-2t-1) &= 0 \end{aligned}$$

Mi želimo da iz ovoga slijedi da je $\beta=0$ (tada je i $\gamma=0$)

$$\Rightarrow -2t-1\neq 0 \quad \Rightarrow t\neq -\frac{1}{2}$$

Dakle, za $t\neq-\frac{1}{2}$ vektori su linearno nezavisni. ☐

1.4.4 Baza vektorskog prostora

Zadatak 1.31. *Pokažite da vektori* $a = (1,1,0),\ b = (0,1,1),\ c = (1,0,1)$ *čine bazu od* $\mathbb{R}^3$.
Nađite koordinate vektora $x = (3,4,5)$, *tj. prikažite ga u toj bazi.*

Rješenje.
Pošto je riječ o tri vektora iz $\mathbb{R}^3$, dovoljno je pokazati da su vektori linearno nezavisni:

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = \ 0$$

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccccl} \alpha & & & + & \gamma & = & 0 \ \Rightarrow \gamma = -\alpha \\ \alpha & + & \beta & & & = & 0 \ \Rightarrow \beta = -\alpha \\ & & \beta & + & \gamma & = & 0 \end{array}$$

$$-\alpha \ - \ \alpha \ = \ 0 \ \Rightarrow 2\alpha = 0 \quad \Rightarrow \alpha = 0 \quad \Rightarrow \underline{\alpha = \beta = \gamma = 0}$$

$\Longrightarrow$ Vektori su linearno nezavisni, pa čine bazu za $\mathbb{R}^3$.

Nadalje,

$$x = \alpha a + \beta b + \gamma c$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccccl} \alpha & & & + & \gamma & = & 3 \ \Rightarrow \alpha = 3 - \gamma \\ \alpha & + & \beta & & & = & 4 \\ & & \beta & + & \gamma & = & 5 \ \Rightarrow \beta = 5 - \gamma \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 3 - \gamma \ + \ 5 - \gamma & = & 4 \\ 2\gamma & = & 4 \ \Rightarrow \underline{\gamma = 2,\ \alpha = 1,\ \beta = 3} \end{array}$$

Vektor x u bazi $\{a,\ b,\ c\}$ jednak je $x = \underbrace{(1,\ 3,\ 2)}_{\text{Koeficijenti iz linearne kombinacije}}$.

□

Zadatak 1.32. *Provjerite da li skup vektora $S = \{a, b\}$ čini bazu od $\mathbb{R}^3$ ako su $a = (1, 0, 0),\ b = (0, -2, 0)$.*

Rješenje.
Skup $\{a, b\}$ nije baza od $\mathbb{R}^3$ jer je $k(\{a, b\}) = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$. □

Zadatak 1.33. *Provjerite da li skup vektora $S = \{a, b, c\}$ čini bazu od $\mathbb{R}^2$ ako su $a = (-1, 0),\ b = (0, 2),\ c = (1, 1)$.*

Rješenje.
Skup $\{a, b, c\}$ ne čini bazu od $\mathbb{R}^2$ jer je $k(\{a, b, c\}) = 3 \neq 2 = \dim \mathbb{R}^2$. □

1.5 Rang matrice

Rang matrice je maksimalan *broj linearno nezavisnih redaka* (=maksimalan broj linearno nezavisnih *stupaca*) matrice.

Zadatak 1.34. *Odredite rang matrice A, ako je:*

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix},$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix},$$

c)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ \frac{1}{7} & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

a) Primijetimo da je matrica tipa 3×4, pa joj je najveći mogući rang 3.

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ {\scriptstyle I \cdot (-2) + II} \\ {\scriptstyle I \cdot (-1) + III} \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ {\scriptstyle II \cdot (-2) + III} \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} {\scriptstyle \text{3.stupac} \leftrightarrow \text{4.stupac}} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ {\scriptstyle / : (-7)} \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} {\scriptstyle I + (-2) \cdot III} \\ {\scriptstyle II + 3 \cdot III} \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow r(A) = 3$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} {\scriptstyle /:2} \\ \\ {\scriptstyle /:3} \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ {\scriptstyle I \cdot (-1) + II} \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ {\scriptstyle /:(-2)} \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ {\scriptstyle II \cdot (-1) + III} \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow r(A) = 2$$

c)

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ \frac{1}{7} & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ {\scriptstyle I \cdot (-2) + II} \\ {\scriptstyle I \cdot (-\frac{1}{7}) + III} \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow r(A) = 1$$

□

DZ 1.35. *Odredite rang matrice A, ako je:*
a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

b)

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. a) $r = 3$, b) $r = 2$.

Zadatak 1.36. *Odredite parametre a, $b \in \mathbb{R}$ takve da je rang matrice $r(A) = 2$, ako je*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -3 & -4 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ a & b & 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
A = & \begin{bmatrix} 2 & 6 & -3 & -4 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ a & b & 6 & -2 \end{bmatrix}\begin{array}{l} {\scriptstyle I \leftrightarrow II} \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -3 & -4 \\ a & b & 6 & -2 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ {\scriptstyle \text{1.stupac} \leftrightarrow \text{ 3.stupac}} \\ {\scriptstyle \text{2.stupac} \leftrightarrow \text{ 4.stupac}} \end{array} \\
\sim & \begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 & 3 \\ -3 & -4 & 2 & 6 \\ 6 & -2 & a & b \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ {\scriptstyle I \cdot 3 + II} \\ {\scriptstyle I \cdot (-6) + III} \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -10 & 5 & 15 \\ 0 & 10 & a-6 & b-18 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ {\scriptstyle II \cdot 1 + III} \end{array} \\
\sim & \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -10 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & a-1 & b-3 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ {\scriptstyle / : (-10)} \\ \\ \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & a-1 & b-3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Vidimo, $r(A) = 2$ ako i samo ako vrijedi:

$$\begin{aligned} a - 1 = 0 &\Rightarrow \underline{a = 1} \\ b - 3 = 0 &\Rightarrow \underline{b = 3}. \end{aligned}$$

□

Napomena:

- A je **regularna** $\Longleftrightarrow$ svi stupci (retci) linearno nezavisni $\Longleftrightarrow$ r(A) je maksimalan.
- A je **singularna** $\Longleftrightarrow$ stupci (retci) linearno zavisni $\Longleftrightarrow$ r(A) nije maksimalan.
- A je regularna $\Longleftrightarrow$ ima inverz.

Zadatak 1.37. *Provjerite da li je skup vektora* $\{a,\ b,\ c\}$ *baza vektorskog prostora* $\mathbb{R}^3$*, ako su* $a = (2,1,1),\ b = (1,3,2),\ c = (1,0,1)$*.*

Rješenje.
Skup $\{a,\ b,\ c\}$ će biti baza od $\mathbb{R}^3$ ako su ta tri vektora linearno nezavisna, tj. ako je rang matrice ovih vektora (poslažemo ih u stupce ili retke) maksimalan, tj. $r(A) = 3$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{I \leftrightarrow III} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ {\scriptstyle I\cdot(-1)+II} \\ {\scriptstyle I\cdot(-2)+III} \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} {\scriptstyle II\cdot(-2)+I} \\ \\ {\scriptstyle II\cdot 3+III} \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ {\scriptstyle /:(-4)} \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix} \begin{matrix} {\scriptstyle III\cdot(-3)+I} \\ {\scriptstyle III\cdot(-1)+II} \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Longrightarrow$ r(A)=3 (maksimalan) $\Longrightarrow$ linearno nezavisan skup $\Longrightarrow$ baza! ☐

DZ 1.38. *Razapinje li skup vektora* $\{a,\ b,\ c,\ d\}$ *prostor* $\mathbb{R}^3$*, ako su* $a = (1,0,1),\ b = (2,1,0),\ c = (0,0,1),\ d = (-1,0,0)$*?*

Rješenje.
Vektori će razapinjati prostor $\mathbb{R}^3$ ako među njima postoje tri linearno nezavisna vektora, tj. ako je $r(A) = 3$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{I\cdot(-1)+III} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} {\scriptstyle II\cdot(-2)+I} \\ \\ {\scriptstyle II\cdot 2+III} \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Longrightarrow$ r(A)=3 $\Longrightarrow$ vektori razapinju $\mathbb{R}^3$.
Međutim, skup $\{a,\ b,\ c,\ d\}$ nije baza tog prostora jer su vektori linearno zavisni, no to se vidi i odmah jer je $k(\{a,\ b,\ c,\ d\}) = 4 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$. ☐

Zadatak 1.39. *Diskutirajte rang matrice* A *u ovisnosti o* $t \in \mathbb{R}$ *ako je*

$$A = \begin{bmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

$$A = \begin{bmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{bmatrix}_{I \leftrightarrow III} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ {\scriptstyle I \cdot (-1) + II} \\ {\scriptstyle I \cdot (-t) + III} \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & t-1 & 1-t \\ 0 & 1-t & 1-t^2 \end{bmatrix}$$

- $\boxed{t = 1}$

$$\Rightarrow A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 1.$$

- $\boxed{t \neq 1}$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & t-1 & 1-t \\ 0 & 1-t & 1-t^2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ {\scriptstyle /:(t\text{-}1)} \\ {\scriptstyle /:(1\text{-}t)} \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 1 & 1+t \end{bmatrix} \begin{array}{l} {\scriptstyle II \cdot (-1) + I} \\ \\ {\scriptstyle II \cdot (-1) + III} \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & t+1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2+t \end{bmatrix}$$

  - $\boxed{t = -2}$

$$\Rightarrow A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 2.$$

  - $\boxed{t \neq -2}$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t+1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2+t \end{bmatrix}_{/:(2+t)} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & t+1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix} \begin{array}{l} {\scriptstyle III \cdot (-(t+1)) + I} \\ {\scriptstyle III + II} \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow r(A) = 3$$

$t = 1 \quad \Rightarrow r(A) = 1,$
$t = -2 \quad \Rightarrow r(A) = 2,$
$t \in \mathbb{R} \backslash \{-2, 1\} \quad \Rightarrow r(A) = 3.$ □

DZ 1.40. *Odredite $t \in \mathbb{R}$ takav da je matrica A regularna, ako je*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ t & 1 & -2 \\ t & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. $t \neq \frac{3}{2} \Rightarrow r(A) = 3 \Rightarrow A$ regularna

1.6 Sustavi linearnih jednadžbi

Sustave **linearnih** jednadžbi ćemo rješavati tzv. *Gauss-Jordanovim postupkom* koji proširenu matricu sustava elementarnim transformacijama nad recima svodi na kanonsku matricu.
"Stari srednjoškolski postupak" ćemo zaboraviti!

Teorem 1. (Kronecker-Capelli): Sustav linearnih jednadžbi $Ax = b$ ima rješenje (*konzistentan* je) ako i samo ako vrijedi $r(A) = r(A|b)$[1].

Zadatak 1.41. *Riješite sustav:*

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 4 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ 3x & + & 2y & + & 3z & = & 12 \end{array} \right.$$

Rješenje.
Promatramo proširenu matricu sustava i radimo transformacije na njoj:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 12 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ {\scriptstyle I\cdot(-2)+II} \\ {\scriptstyle I\cdot(-3)+III} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ {\scriptstyle /:(-3)} \\ {\scriptstyle /:(-4)} \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} {\scriptstyle II\cdot(-2)+I} \\ \\ {\scriptstyle II\cdot(-1)+III} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z &= -1 \\ 0 &= -1 \qquad \Rightarrow\Leftarrow \end{aligned}$$

$r(A) = 2,\ r(A|b) = 3 \quad \Rightarrow r(A) \neq r(A|b) \quad \Rightarrow$ nema rješenja! □

---

[1] $A|b$ je oznaka za proširenu matricu sustava.

Zadatak 1.42. *Odredite $a \in \mathbb{R}$ takav da je sljedeći sustav nekonzistentan:*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & & & = & a \\ -2x & + & y & + & 2z & = & a-1 \\ -x & & & + & 3z & = & a+1 \end{array}\right.$$

Rješenje.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & -1 & 0 & a \\ -2 & 1 & 2 & a-1 \\ -1 & 0 & 3 & a+1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ {\scriptstyle I\cdot 2+II} \\ {\scriptstyle I+III} \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 2 & 3a-1 \\ 0 & -1 & 3 & 2a+1 \end{array}\right]{\scriptstyle /\cdot(-1)}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & a \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -3a+1 \\ 0 & -1 & 3 & 2a+1 \end{array}\right]\begin{array}{l} {\scriptstyle II+I} \\ \\ {\scriptstyle II+III} \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 1-2a \\ 0 & 1 & -2 & -3a+1 \\ 0 & 0 & 1 & 2-a \end{array}\right]$$

$r(A) = 3 = r(A|b), \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow$ ne postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da je sustav nekonzistentan!

□

DZ 1.43. *Odredite $b \in \mathbb{R}$ takav da sljedeći sustav ima rješenje:*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & + & bx_3 & = & b \\ 2x_1 & & & + & bx_3 & = & 2 \\ -x_1 & + & 3x_2 & & & = & b - 2 \end{array}\right.$$

Rješenje. konzistentan $\forall b \in \mathbb{R}$

Teorem 2. Pretpostavimo da sustav $Ax = b$ *ima rješenje*, odnosno da je $r(A) = r(A|b)$. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:

1. Ako je $r(A) < n$ (rang matrice sustava manji je od broja nepoznanica n), tada sustav ima beskonačno mnogo rješenja.
2. Ako je $r(A) = n$ (rang matrice sustava jednak je broju nepoznanica n), tada sustav ima jedinstveno rješenje.

Uočimo, nadalje, da $r(A)$ ne može nikada biti veći od broja nepoznanica n jer je n ujedno i broj stupaca matrice A.

Zadatak 1.44. *Riješite sustav:*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 2x & - & 3y & + & 2z & = & 1. \end{array}\right.$$

Rješenje.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 0\\ 2 & -3 & 2 & 1\end{array}\right]\begin{array}{l} \\ {\scriptstyle I\cdot(-1)+II}\\ {\scriptstyle I\cdot(-2)+III}\end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1\\ 0 & 4 & -4 & -1\\ 0 & 1 & -4 & -1\end{array}\right]_{II\leftrightarrow III}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1\\ 0 & \boxed{1} & -4 & -1\\ 0 & 4 & -4 & -1\end{array}\right]\begin{array}{l} {\scriptstyle II\cdot 2+I}\\ \\ {\scriptstyle II\cdot(-4)+III}\end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -1\\ 0 & \boxed{1} & -4 & -1\\ 0 & 0 & 12 & 3\end{array}\right]_{/:12}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -1\\ 0 & 1 & -4 & -1\\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{4}\end{array}\right]\begin{array}{l} {\scriptstyle III\cdot 5+I}\\ \\ {\scriptstyle III\cdot 4+II}\end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \underset{\text{x}}{0} & \underset{\text{y}}{0} & \underset{\text{z}}{1} & \frac{1}{4}\end{array}\right]$$

$r(A) = 3$; $r(A|b) = 3$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\\ 0\\ \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

□

Zadatak 1.45. *Riješite sustav:*

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 7\\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 11\\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4.\end{cases}$$

Rješenje.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 2 & 11\\ 2 & 1 & 1 & 7\\ -1 & 1 & 1 & 4\end{array}\right]\begin{array}{l} \\ {\scriptstyle I\cdot(-2)+II}\\ {\scriptstyle I+III}\end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 11\\ 0 & -3 & -3 & -15\\ 0 & 3 & 3 & 15\end{array}\right]_{II+III}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 11\\ 0 & \boxed{1} & 1 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\begin{array}{l} {\scriptstyle II\cdot(-2)+I}\\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 5\\ \underset{\text{x}}{0} & \underset{\text{y}}{0} & \underset{\text{z}}{0} & 0\end{array}\right]$$

$r(A) = 2 = r(A|b) \quad \Rightarrow$ sustav ima rješenje.

$$\begin{array}{ccccccc} x & & & = & 1 & & \\ & y & + \; z & = & 5 & \Rightarrow & y = 5 - z\end{array}$$

Skup rješenja je jednoparametarski. Stavimo $z = u \in \mathbb{R}$,

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\\ 5-u\\ u\end{bmatrix};\ u \in \mathbb{R}.$$

□

Zadatak 1.46. *Riješite sustav:*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & & & - & w & = & 5 \\ x & - & y & - & 2z & + & w & = & 1. \end{array}\right.$$

Rješenje.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right]_{I\cdot(-1)+II} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right]_{/:(-2)}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]^{II\cdot(-1)+I} \sim \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} \text{x} & \text{y} & \text{z} & \text{w} \end{array} \end{array}$$

$r(A) = 2 = r(A|b) \quad \Rightarrow$ sustav ima rješenje.

$$\begin{aligned} x &= 3 + z \\ y &= 2 - z + w \end{aligned}$$

Skup rješenja je dvoparametarski. Stavimo $z = u,\ w = t, \quad u,\ t \in \mathbb{R}$,

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & + & u & & \\ 2 & - & u & + & t \\ & & u & & \\ & & & & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};\ u,\ t \in \mathbb{R}.$$

□

Zadatak 1.47. *Riješite sustav:*

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 4 \\ x & + & y & + & z & = & 2. \end{array}\right.$$

Rješenje.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]_{I\cdot(-1)+II} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right]_{/:2}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \end{array}\right]^{II+I} \sim \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccc} \text{x} & \text{y} & \text{z} \end{array} \end{array}$$

$r(A) = 2 = r(A|b) \quad \Rightarrow$ sustav ima rješenje.

$$\begin{aligned} y &= 3 - x \\ z &= \ -1 \end{aligned}$$

Skup rješenja je jednoparametarski. Stavimo $x = u, \quad u \in \mathbb{R}$,

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & u \\ 3 & - & u \\ -1 & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \ u \in \mathbb{R}.$$

$\square$

DZ 1.48. *Riješite sustav:*

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & 5x_4 & = & -1 \\ -x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 3x_4 & = & 3. \end{array} \right.$$

Rješenje. Sustav nema rješenja!

Zadatak 1.49. *Riješite sustav u ovisnosti o parametru β:*

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 4 \\ x_1 & + & 4x_2 & & & + & 4x_4 & = & \beta \end{array} \right.$$

Rješenje.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 4 & \beta \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ {\scriptstyle I\cdot(-2)+II} \\ {\scriptstyle I\cdot(-1)+III} \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & \beta-5 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ {\scriptstyle II+III} \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta-11 \end{array} \right]$$

- $\beta \neq 11 \quad \Rightarrow r(A) = 2, \ r(A|b) = 3 \quad \Rightarrow$ Sustav nema rješenja!
- $\beta = 11 \quad \Rightarrow r(A) = 2 = r(A|b) \quad \Rightarrow$ Sustav ima rješenje:

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ {\scriptstyle /:(-3)} \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{3} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} {\scriptstyle II\cdot(-1)+I} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 - \frac{4}{3}x_3 \\ x_2 &= 2 + \frac{1}{3}x_3 - x_4 \end{aligned}$$

Stavimo $x_3 = u,\ x_4 = t;\quad u,\ t \in \mathbb{R}$:

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & - & \frac{4}{3}u & & \\ 2 & + & \frac{1}{3}u & - & t \\ & & u & & \\ & & & & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};\ u,\ t \in \mathbb{R}.$$

□

Teorem 3.: Homogeni sustav (sustav kod kojeg je $b = 0$, tj. $Ax = 0$) uvijek ima barem trivijalno rješenje ($x = 0$).
Ako je $m = n$ (broj jednadžbi=broj nepoznanica), razlikujemo 2 slučaja:

- $r(A) = n \iff$ postoji *samo trivijalno rješenje*,
- $r(A) < n \iff$ pored trivijalnog, postoji i netrivijalno rješenje, tj. *beskonačno mnogo rješenja.*

Zadatak 1.50. *Za koju vrijednost parametra $t \in \mathbb{R}$ sustav ima netrivijalno rješenje, ako je:*

$$\begin{cases} x = & ty \\ y = & t^2 z \\ z = & t^3 x \end{cases}$$

Rješenje.
Promatramo sustav:

$$\begin{cases} x & - & ty & & & = & 0 \\ & & y & - & t^2 z & = & 0 \\ t^3 x & & & - & z & = & 0. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -t^2 & 0 \\ t^3 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]_{I\cdot(-t^3)+III} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -t & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -t^2 & 0 \\ 0 & t^4 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} {\scriptstyle II\cdot t+I} \\ \\ {\scriptstyle I\cdot(-t^4)+III} \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -t^3 & 0 \\ 0 & 1 & -t^2 & 0 \\ 0 & 0 & t^6-1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned}\text{Sustav ima netrivijalno rješenje } &\Leftrightarrow r(A) < 3\\ &\Leftrightarrow t^6 - 1 = 0\\ &\Leftrightarrow (t^3-1)(t^3+1) = 0\\ &\Leftrightarrow (t-1)(1+t+t^2)(t+1)(1-t+t^2) = 0\\ &\Leftrightarrow t \in \{-1, 1\}.\end{aligned}$$

□

DZ 1.51. *Odredite parametar $t \in \mathbb{R}$ takav da sustav*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0\\ 2x & - & y & + & z & = & 0\\ x & - & y & + & tz & = & 0\end{array}\right.$$

ima samo trivijalno rješenje.

Rješenje. Sustav ima samo trivijalno rješenje ⇔ r(A)=3.

$$\Rightarrow \quad t \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$$

Zadatak 1.52. *Dane su funkcije ponude i potražnje za model tržista dvaju dobara:*

$$\begin{array}{rcrcrcr} d_1 & = & 18 & - & 3p_1 & + & p_2\\ s_1 & = & -2 & + & 4p_1 & & \\ d_2 & = & 2 & + & p_1 & - & 2p_2\\ s_2 & = & -2 & & & + & 3p_2,\end{array}$$

pri čemu je:

d_1 *– količina potražnje za dobrom 1,*
d_2 *– količina potražnje za dobrom 2,*
s_1 *– količina ponude dobra 1,*
s_2 *– količina ponude dobra 2.*

Odredite ravnotežne vrijednosti na tržistu.

Rješenje.

Ravnoteža na tržistu:

$$\begin{aligned} d_1 &= s_1,\\ d_2 &= s_2.\end{aligned}$$

Rješavamo, dakle, sustav:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 18 & - & 3p_1 & + & p_2 & = & -2 & + & 4p_1 & & \\ 2 & + & p_1 & - & 2p_2 & = & -2 & & & & +3p_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & 7p_1 & - & p_2 & = & 20 \\ & - & p_1 & + & 5p_2 & = & 4 \end{array}$$

Rješavamo sustav G-J metodom:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 7 & -1 & 20 \\ -1 & 5 & 4 \end{array}\right]_{I \leftrightarrow II} \sim \left[\begin{array}{rr|r} -1 & 5 & 4 \\ 7 & -1 & 20 \end{array}\right]_{/ : (-1)}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rr|r} \boxed{1} & -5 & -4 \\ 7 & -1 & 20 \end{array}\right]_{I \cdot (-7) + II} \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -5 & -4 \\ 0 & 34 & 48 \end{array}\right]_{/ : 34}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & \frac{24}{17} \end{array}\right]^{II \cdot 5 + I} \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & \frac{52}{17} \\ 0 & 1 & \frac{24}{17} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad p_1^* = \frac{52}{17}, \quad p_2^* = \frac{24}{17}$$

$$\Rightarrow \quad d_1^* = s_1^* = \frac{174}{17},$$

$$d_2^* = s_2^* = \frac{38}{17}.$$

□

Zadatak 1.53 (IS-LM analiza)**.**
Tržiste je roba jedne dvosektorske ekonomije u ravnoteži kad je $Y = C + I$, pri čemu je

Y–dohodak,
C–potrošnja,
I–investicije.

Tržiste je novca u ravnoteži kad je ponuda novca (M_s) jednaka potražnji za novcem (M_d), gdje se ova potonja sastoji iz transakcijske potražnje i potražnje iz predostrožnosti (M_t), te špekulativne potražnje (M_z).
Promatramo jednu dvosektorsku ekonomiju u kojoj je

$$\begin{array}{rcrcrcr} C & = & 48 & + & 0.8Y & & \\ I & = & 98 & & & - & 75i \\ M_s & = & 250 & & & & \\ M_t & = & & & 0.3Y & & \\ M_z & = & 52 & & & - & 150i \end{array}$$

gdje je i kamatna stopa.
Odredite vrijednosti dohotka i kamatne stope za koje su i tržiste roba i tržiste novca u ravnoteži.

Rješenje.
IS (ravnoteža na tržistu roba)

$$\begin{aligned} Y =& C + I \\ Y =& 48 + 0.8Y + 98 - 75i \\ &\Rightarrow \quad 0.2Y + 75i - 146 = 0 \end{aligned}$$

LM (ravnoteža na tržistu novca)

$$\begin{aligned} M_s =& M_t + M_z \\ 250 =& 0.3Y + 52 - 150i \\ &\Rightarrow \quad 0.3Y - 150i - 198 = 0 \end{aligned}$$

Dakle, rješavamo sustav:

$$\begin{array}{rcrcr} 0.2Y & + & 75i & = & 146 \\ 0.3Y & - & 150i & = & 198 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{5} & 75 & | & 146 \\ \frac{3}{10} & -150 & | & 198 \end{array}\right]_{/\cdot 5} \sim \left[\begin{array}{ccc} \boxed{1} & 375 & | & 730 \\ \frac{3}{10} & -150 & | & 198 \end{array}\right]_{I\cdot(-\frac{3}{10})+II}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc} \boxed{1} & 375 & | & 730 \\ 0 & -\frac{525}{2} & | & -21 \end{array}\right]_{/\cdot(-\frac{2}{525})} \sim \left[\begin{array}{ccc} 1 & 375 & | & 730 \\ 0 & \boxed{1} & | & \frac{42}{525} \end{array}\right]^{II\cdot(-375)+I}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & | & 700 \\ 0 & 1 & | & \frac{2}{25} \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow & \text{ravnotežni dohodak } Y^* = 700 \\ & \text{ravnotežna kamatna stopa } i^* = \frac{2}{25} = 0.08 \end{aligned}$$

□

Zadatak 1.54 (Zadatak s testa)**.**
Riješite matričnu jednadžbu $AX = B$ ako su dane matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad i \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Ako je A regularna (tj. ima inverz) možemo naći rješenje kao $X = A^{-1}B$, inače moramo moramo množiti AX. Znači,

$$\begin{aligned} A^{-1}\cdot /\quad AX &= B \\ X &= A^{-1}B \\ X &= \begin{bmatrix} -16 & -8 & -4 \\ -5 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ili (možda) lakši način

$$\left[\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}}^{A} & \overbrace{\begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{matrix}}^{B} \end{array}\right]\begin{matrix} {\scriptstyle /\cdot(-1)} \\ {\scriptstyle /\cdot(-1)} \\ {\scriptstyle /\cdot(-1)} \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & -3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right]\begin{matrix} {\scriptstyle II\cdot 2+I} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -7 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & -1 & 0 \end{array}\right]\begin{matrix} {\scriptstyle III\cdot 7+I} \\ {\scriptstyle III\cdot 2+II} \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I} & \underbrace{\begin{matrix} -16 & -8 & -4 \\ -5 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{matrix}}_{X} \end{array}\right]$$

□

Zadatak 1.55 (Zadatak s testa)**.**
Riješite matričnu jednadžbu $XA = B$ ako su dane matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad i \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 10 \\ -3 & 2 & 7 \\ 0 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} XA &= B/\ ^{T} \\ A^{T}X^{T} &= B^{T} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{matrix}}_{A^{T}} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{matrix}}_{B^{T}} \end{array}\right] \sim\cdots\sim \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I} & \underbrace{\begin{matrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{matrix}}_{X^{T}} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

□

Zadatak 1.56 (Zadatak s testa).
Ispitajte linearnu nezavisnost vektora

$$A = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ako su vektori linearno zavisni, prikažite jedan od njih kao linearnu kombinaciju preostalih.

Rješenje.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B & C & A \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} \boxed{-1} & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} {\scriptstyle /\cdot(-1)} \\ {\scriptstyle I+II} \\ {\scriptstyle I\cdot 2+III} \\ {\scriptstyle I+IV} \end{array} \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ {\scriptstyle II\cdot(-1)+III} \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} {\scriptstyle II\cdot\frac{1}{2}+I} \\ {\scriptstyle /\cdot\frac{1}{2}} \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Rang proširene matrice sustava je 2, što je strogo manje od maksimalnog ranga proširene matrice sustava koji je jednak 3 $\Rightarrow$ A, B i C su linearno zavisni vektori i vrijedi

$$A = \frac{5}{2}B + \frac{1}{2}C.$$

□

1.7 Invertiranje matrica

Matrica A ima inverz A^{-1} ako i samo ako vrijedi

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I.$$

Stoga je invertiranje matrice zapravo ekvivalentno rješavanju matrične jednadžbe.

Zadatak 1.57. *Odredite* A^{-1} *ako je zadano* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Rješenje.

$$\left[\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix}\boxed{1} & 1 & 1\\ 2 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{matrix}}^{A} & \overbrace{\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}}^{I}\end{array}\right]\begin{matrix}\\ {\scriptstyle I\cdot(-2)+II}\\ {\scriptstyle I\cdot(-2)+III}\end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1\end{array}\right]{\scriptstyle II\leftrightarrow III}$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \boxed{-1} & -1 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0\end{array}\right]\begin{matrix}{\scriptstyle II+I}\\ {\scriptstyle /\cdot(-1)}\\ {\scriptstyle /\cdot(-\frac{1}{2})}\end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -\frac{1}{2} & 0\end{array}\right]{\scriptstyle III\cdot(-1)+II}$$

$$\sim\left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}}_{I} & \underbrace{\begin{matrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & \frac{1}{2} & -1\\ 1 & -\frac{1}{2} & 0\end{matrix}}_{A^{-1}}\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1\\ 1 & \frac{1}{2} & -1\\ 1 & -\frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$$

□

Zadatak 1.58. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 2\end{bmatrix}$. *Odredite* A^{-1}.

Rješenje.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\begin{matrix}\\ {\scriptstyle I\cdot(-2)+II}\\ {\scriptstyle I\cdot(-3)+III}\end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \boxed{-3} & 2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 2 & -3 & 0 & 1\end{array}\right]\begin{matrix}\\ \\ {\scriptstyle II\cdot(-1)+III}\end{matrix}$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1\end{array}\right]$$

Iz posljednjeg reda vidimo da je rang matrice A jednak 2, dakle manji od maksimalnog, što znači da A nije regularna i nema inverz.

$$\Rightarrow \nexists A^{-1}.$$

□

DZ 1.59. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0\\ 4 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$. *Odredite* A^{-1}.

DZ 1.60. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. *Odredite* A^{-1}.

Rješenje. A^{-1} ne postoji.

1.8 Determinante

Determinante se definiraju za kvadratne matrice. Najopćenitija metoda za računanje determinante neke matrice je Laplaceov razvoj determinante.

Laplaceov razvoj determinante

Laplaceov razvoj determinante može se provoditi po bilo kojem (jednom) stupcu ili retku matrice. Pretpostavimo da je dana matrica $A \in \mathcal{M}_n$ s elementima a_{ij}. Ako u matrici A izbrišemo i-ti redak i j-ti stupac, dobivamo novu matricu $A'_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}$. Njena determinanta ($|A'_{ij}|$) naziva se **subdeterminanta** ili **minora**.

Laplaceov razvoj po i-tom retku:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A'_{ij}|$$

Laplaceov razvoj po j-tom stupcu:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A'_{ij}|$$

Iz Laplaceovog razvoja slijedi da se determinanta matrice formata 2 × 2 računa prema formuli

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - c \cdot b.$$

Primjer 1.61. *Neka je* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}$. *Izračunajte* $|A|$ *Laplaceovim razvojem*

a) *po* 1. *retku,*

b) *po* 1. *stupcu.*

Rješenje.

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$+ 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot (-10 + 8) - 3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 2 \cdot (-2) = -4$$

b)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} + 0 + 0$$

$$= 2 \cdot (-10 + 8) = -4$$

□

Napomena:
Pametno je izabrati onaj stupac ili redak u kojem ima više nula jer tako imamo kraći račun.

Sarrusovo pravilo
Koristi se za računanje determinanti matrica **isključivo tipa** 3×3. **Za ostale tipove** matrica Sarrusovo pravilo **ne može se primijeniti**!

Primjer 1.62. a)

$$\begin{array}{ccc} + & + & + \\ \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{array} = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 0 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 0 -$$

$$\begin{array}{ccc} - & - & - \\ \end{array}$$

$$-1 \cdot 2 \cdot 1 - 0 \cdot 3 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 0 =$$

$$= 6 - 2 = 4$$

b)

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} + & + & + \end{array}\\
\left|\begin{array}{rrr} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{array}\right| \begin{array}{rr} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{array}\\
\begin{array}{ccc} - & - & - \end{array}
\end{array}
\begin{aligned}
&=2\cdot(-1)\cdot(-3)+0\cdot 3\cdot 0+2\cdot 0\cdot 0-\\
&-0\cdot(-1)\cdot 2-0\cdot 3\cdot 2-(-3)\cdot 0\cdot 0\\
&=6
\end{aligned}$$

Dakle, prema Sarrusovom pravilu determinanta matrice formata 3 × 3 se računa tako da se s desne strane dopišu prva dva stupca matrice, zatim se zbroje umnošci elemenata na dijagonalama koje se protežu u smjeru SZ-JI, a potom se od dobivenog zbroja oduzmu umnošci elemenata na dijagonalama koje se protežu u smjeru JZ-SI.

Nekoliko pravila za računanje determinanti:

- Zamjenom dva retka ili dva stupca matrice, njena determinanta mijenja predznak.
  Primjer:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)-2\cdot 3=-7$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 2-(-1)\cdot 1=7$$

- Ako matrica ima nul redak ili nul stupac tada joj je determinanta jednaka nuli.
  Primjer:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 0\cdot(-2)-0\cdot 1=0$$

- Transponiranjem matrice njena determinanta ostaje ista. Primjer:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1-(-2)\cdot 2=3$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1-2\cdot(-2)=3$$

- Zbroj determinanti dviju matrica koje se razlikuju samo po jednom retku (ili stupcu) jednak je determinanti matrice koja se sastoji od

redaka (ili stupaca) koji su bili isti u polaznim matricama i retka (ili stupca) koji je jednak zbroju redaka (ili stupaca) koji su bili različiti u polaznim matricama.
Primjer:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-2) = 8$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 = -7$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2+3 \\ 2 & 4+(-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 1 = 8 + (-7)$$

- Determinanta matrice koja ima dva jednaka ili dva proporcionalna retka (ili stupca) jednaka je nuli.
Primjer:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 15 \end{vmatrix} = 1 \cdot 15 - 5 \cdot 3 = 0$$

- Determinanta matrice dobivene množenjem skalarom $\alpha \in \mathbb{R}$ **samo jednog** retka (ili stupca) početne matrice jednaka je determinanti početne matrice pomnoženoj istim tim skalarom α.
Primjer:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 4 \cdot 2 = -10$$

$$\begin{vmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 4 \cdot 6 = -20 = 2 \cdot (-10)$$

- Determinanta gornje ili donje trokutaste matrice jednaka je umnošku elemenata na glavnoj dijagonali. Ta činjenica slijedi direktno iz Laplaceovog razvoja determinante.

- Determinanta svake jedinične matrice jednaka je 1. Ta činjenica slijedi također direktno iz Laplaceovog razvoja determinante.

- Ako u matrici nekom retku (ili stupcu) dodamo neki drugi redak (ili stupac) pomnožen skalarom $\alpha \in \mathbb{R}$, determinanta ostaje ista.

Primjer 1.63.

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ {\scriptstyle I\cdot(-2)+II} \\ {\scriptstyle I\cdot(-3)+III} \\ {\scriptstyle I+IV} \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 7 \\ 0 & -2 & -4 & 7 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 & 7 \\ -2 & -4 & 7 \\ 6 & 6 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} {\scriptstyle II\cdot(-1)+I} \\ \\ \\ \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 7 \\ 6 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -7\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = -7\cdot(6-6) = 0$$

<u>**Napomena:**</u>

A je **regularna** $\Leftrightarrow \exists A^{-1} \Leftrightarrow r(A)$ je maksimalan $\Leftrightarrow det(A) \neq 0$
A je **singularna** $\Leftrightarrow \nexists A^{-1} \Leftrightarrow r(A)$ nije maksimalan $\Leftrightarrow det(A) = 0$

Zadatak 1.64. *Provjerite linearnu nezavisnost vektora* $a = (1,1,0)$, $\quad b = (1,0,1)$, $\quad c = (0,1,1)$.

Rješenje.
Vektori su linearno nezavisni $\Leftrightarrow$ je matrica sastavljena od tih vektora punog ranga $\Leftrightarrow$ je determinanta te matrice $\neq 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ {\scriptstyle I\cdot(-1)+II} \\ \\ \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1\cdot 1 - 1\cdot 1 = -2$$

$$-2 \neq 0 \Rightarrow \text{ vektori su linearno nezavisni}$$

□

Zadatak 1.65. *Odredite parametar* $t \in \mathbb{R}$ *t. d. sustav*

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & t \\ -x & + & ty & + & z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & z & = & t \end{array} \right.$$

ima jedinstveno rješenje.

Rješenje.
Sustav ima jedinstveno rješenje $\Leftrightarrow r(A)$ maksimalan $\Leftrightarrow det(A) \neq 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & t & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ {\scriptstyle I+II} \\ {\scriptstyle I\cdot(-1)+III} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t+1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} {\scriptstyle 2.\text{ stupac} \leftrightarrow 3.\text{ stupac}} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & t+1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \cdot 2 \cdot (-3) = 6 \neq 0$$

$$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R} \text{ sustav ima jedinstveno rješenje}$$

☐

Zadatak 1.66. *Odredite parametar $x \in \mathbb{R}$ takav da matrica A ima inverz ako je*

$$A = \begin{bmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{bmatrix}$$

Rješenje.
A ima inverz $\Leftrightarrow det(A) \neq 0$.

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} \begin{matrix} {\scriptstyle III+II+I} \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3+x & 3+x & 3+x \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$$

$$= (3+x) \cdot \begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ {\scriptstyle I\cdot(-1)+II} \\ {\scriptstyle I\cdot(-1)+III} \end{matrix} = (3+x) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$= (3+x) \cdot x^2 \neq 0$$

$$\Rightarrow x \neq -3 \text{ i } x \neq 0 \quad \text{tj.} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$$

☐

Zadatak 1.67.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x & -y & z \\ x & y & -z \end{vmatrix} = x \cdot y \cdot z \begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ {\scriptstyle I\cdot(-1)+II} \\ {\scriptstyle I\cdot(-1)+III} \end{matrix}$$

$$= xyz \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = xyz \cdot 1 \cdot (-2)(-2) = 4xyz$$

Zadatak 1.68. *Odredite parametar* $x \in \mathbb{R}$ *t.d. matrica*

$$A = \begin{bmatrix} x & 7 & 2 \\ 1 & x & 1 \\ 2 & -4 & x \end{bmatrix}$$

bude regularna.

Rješenje.

$$\begin{vmatrix} x & 7 & 2 \\ 1 & x & 1 \\ 2 & -4 & x \end{vmatrix}_{III+II+I} = \begin{vmatrix} x+3 & x+3 & x+3 \\ 1 & x & 1 \\ 2 & -4 & x \end{vmatrix}$$

$$= (x+3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 2 & -4 & x \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ {\scriptstyle I \cdot (-1) + II} \\ {\scriptstyle I \cdot (-2) + III} \end{matrix} = (x+3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & -5 & x-2 \end{vmatrix}$$

$$= (x+3) \cdot \begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ -5 & x-2 \end{vmatrix} = (x+3)(x-1)(x-2) \neq 0$$

$$\Rightarrow x \neq -3, \quad x \neq 1, \quad x \neq 2 \quad \text{tj.} \quad x \in \mathbb{R} \backslash \{-3, 1, 2\}$$

Zadatak se mogao riješiti i preko ranga no preko determinante je puno lakše. □

Zadatak 1.69. *Odredite parametar* $a \in \mathbb{R}$ *t.d. vektori* $x = (2a, 2, 2), \quad y = (1, a, 1), \quad z = (1, 1, a)$ *ne čine bazu od* $\mathbb{R}^3$.

Rješenje.

$$A = \begin{bmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}^{III+II+I}$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} a+2 & a+2 & a+2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 2(a+2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ {\scriptstyle I \cdot (-1) + II} \\ {\scriptstyle I \cdot (-1) + III} \end{matrix}$$

$$= 2(a+2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = 2(a+2)(a-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow a = -2, \quad a = 1 \quad \text{tj.} \quad a \in \{-2, 1\}$$

□

Teorem (Binet-Cauchy):
Neka su $A, B \in \mathcal{M}_n$ dvije matrice. Tada vrijedi:

$$det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B).$$

Napomena:
Neka je $A \in \mathcal{M}_n$ matrica i $\alpha \in \mathbb{R}$ skalar. Tada vrijedi:

$$det(\alpha \cdot A) = \alpha^n \cdot det(A).$$

Primjer 1.70. *Izračunajte $det(C)$, $C \in \mathcal{M}_4$, ako je $det(\frac{1}{2}C) = \frac{1}{8}$.*

Rješenje.

$$\frac{1}{8} = det(\frac{1}{2}C) = (\frac{1}{2})^4 \cdot det(C) \Rightarrow det(C) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{16}} = 2.$$

□

Primjer 1.71. *Neka su $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 16 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Ako vrijedi $XA = B$, izračunajte $detX$.*

Rješenje.

$$\begin{aligned} XA &= B \quad /det \\ det(XA) &= det(B) \\ det(X) \cdot det(A) &= det(B) \\ \Rightarrow det(X) &= \frac{det(B)}{det(A)} = 4/2 = 2 \end{aligned}$$

□

Matrica algebarskih komplemenata:

Neka je dana matrica $A \in \mathcal{M}_n$ s elementima a_{ij}. Ako u matrici A izbrišemo i-ti redak i j-ti stupac, dobivamo novu matricu $A'_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}$. Njena determinanta ($|A'_{ij}|$) naziva se **subdeterminanta** ili **minora**. Pripadni **Algebarski**

komplement definiramo kao $A_{ij} = (-1)^{i+j}|A'_{ij}|$. Označimo sa A_K matricu čiji su elementi upravo definirani algebarski komplementi. **Matrica algebarskih komplemenata** definira se kao transponirana matrica matrice A_K, tj. kao matrica A^*, pri čemu je

$$A^* := A_K^T.$$

Matrica algebarskih komplemenata je ponekad korisna za računanje inverza matrice. Vrijedi:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} A^*.$$

Primjer 1.72. *Odredite* A^{-1} *pomoću matrice algebarskih komplemenata ako je*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
A_{11} &= (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 & A_{12} &= (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \\
A_{13} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 & A_{21} &= (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \\
A_{22} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 & A_{23} &= (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \\
A_{31} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 & A_{32} &= (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \\
A_{33} &= (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow A_K = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^* = A_K^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{det(A)} A^* = \frac{1}{-1} \cdot A^* = -A^* = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

□

Zadatak 1.73. *Ispitajte je li matrica* $AA^*A^T \in \mathcal{M}_2$ *regularna ako je*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} det(AA^*A^T) &= det(A \cdot det(A) \cdot A^{-1} \cdot A^T) = det(2 \cdot A \cdot A^{-1} \cdot A^T) \\ &= det(2 \cdot I \cdot A^T) = det(2A^T) = det(2A) = 2^2 \cdot det(A) = 4 \cdot 2 = 8 \end{aligned}$$

□

Zadatak 1.74. *Odredite sve vrijednosti od $t \in \mathbb{R}$ t.d. je $A^{-1} = A$, ako je*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} A^{-1} &= A \quad / \cdot A \\ A^{-1} \cdot A &= A \cdot A \\ I &= A^2 \end{aligned}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & t+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2(t+1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2(t+1) = 0 \Rightarrow t = -1$$

□

DZ 1.75. *Za koju vrijednost $t \in \mathbb{R}$ sustav*

$$\begin{cases} x + y - tz = 0 \\ 2x + ty + z = 0 \\ tx + y + z = 0 \end{cases}$$

a) *ima samo trivijalno rješenje,*

b) *ima i netrivijalno rješenje?*

Rješenje.

a) Sustav ima samo trivijalno rješenje $\Leftrightarrow$ ima jedinstveno rješenje $\Leftrightarrow$ $r(A)$ maksimalan $\Leftrightarrow$ $det(A) \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -t \\ 2 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{vmatrix} = \ldots \neq 0 \Rightarrow t = \ldots$$

b) Sustav ima i netrivijalno rješenje $\Leftrightarrow r(A) <$ maksimalan $\Leftrightarrow det(A) = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -t \\ 2 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{vmatrix} = \ldots = 0 \Rightarrow t = \ldots$$

□

DZ 1.76. *Da li je moguće neki od vektora* $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, $z = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ *prikazati kao linearnu kombinaciju preostalih?*

Rješenje.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{ Vektori su linearno zavisni } \Rightarrow \text{ moguće je.}$$

□

Zadatak 1.77. *Da li je moguće neki od vektora x, y, z (iz prošlog zadatka) prikazati kao linearnu kombinaciju preostalih? Ako jest, prikažite ih.*

Rješenje.
Istovremeno gledamo rang i rješavamo sustav $\alpha x + \beta y = z$, pri čemu su α i β nepoznanice.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \alpha & \beta \end{array} \\ \left[\begin{array}{rr|r} \boxed{1} & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ {\scriptstyle I \cdot 2 + II} \\ {\scriptstyle I \cdot (-1) + III} \end{array} \end{array} \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ {\scriptstyle III \leftrightarrow II} \\ {\scriptstyle \cdot(-1)} \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} {\scriptstyle II + I} \\ \\ {\scriptstyle II \cdot 2 + III} \end{array} \sim \begin{array}{c} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc} \alpha & \beta \end{array} \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{ rang proširene matrice sustava je 2 } \Rightarrow \text{ vektori su linearno zavisni}$$

$$\alpha = 1 \quad \beta = -1 \quad \Rightarrow \quad z = x - y$$

□

Zadatak 1.78. *Zadani su vektori* $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. *Odredite vektor* $x \in \mathbb{R}^3$ *t.d. su skupovi* $\{a, b, x\}$ *i* $\{a, c, x\}$ *linearno zavisni i* $(a, x) = a^T x = 6$.

Rješenje.

$$x \in \mathbb{R}^3 \quad \Rightarrow \quad x = (x_1, x_2, x_3)$$

$\{a, b, x\}$ linearno zavisni:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & x_1 \\ 2 & 0 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \end{vmatrix} = x_1 \cdot (-2) - x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 2 = 0$$

$\{a, c, x\}$ linearno zavisni:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 2 & 0 & x_2 \\ 1 & 2 & x_3 \end{vmatrix} = x_1 \cdot 4 - x_2 \cdot 1 + x_3 \cdot (-2) = 0$$

$$a^T x = 6 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$$

Dakle, imamo sustav

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x_1 & & & + & 2x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 6 \end{array} \right.$$

čijim rješavanjem dobivamo

$$x = (x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 1)$$

□

Zadatak 1.79. *Izračunajte* $det(X)$ *ako je* $AX - B = 2X$, *gdje je*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} AX - 2X &= B \\ (A - 2I)X &= B \quad /det \\ det(A - 2I) \cdot detX &= detB \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad detX = \frac{det(B)}{det(A-2I)}$$

$$\begin{aligned} det(A-2I) &= det(\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}) \\ &= det(\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}) = 10 \\ det(B) &= 10 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad det(X) = \frac{-2}{10} = -\frac{1}{5}$$

□

DZ 1.80. *Riješite matričnu jednadžbu* $XA = B$ *ako su dane matrice*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \;\; i \;\; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

I. način

$$\begin{aligned} XA &= B \quad / \cdot A^{-1} \\ X &= BA^{-1} \quad \ldots \end{aligned}$$

II. način

$$\begin{aligned} XA &= B \quad /^T \\ A^T X^T &= B^T \end{aligned}$$

Sada se riješi taj sustav:

$$\left[\begin{array}{c|c} A^T & B^T \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{c|c} I & X^T \end{array}\right].$$

□

DZ 1.81. *Riješite matričnu jednadžbu* $XA = B$, *pri čemu je*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} \text{det}A = 1 \neq 0 \quad &\Longrightarrow \text{postoji inverzna matrica, } A^{-1} \\ &\Longrightarrow X = A^{-1}B. \end{aligned}$$

Zadatak 1.82. *Riješite matričnu jednadžbu $AX = B$, pri čemu je*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ -28 & -14 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

$$\text{det}A = -6 + 6 = 0 \quad \Longrightarrow \text{ne postoji inverzna matrica } A^{-1}!$$

Stavimo $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & v \end{bmatrix}$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ -28 & -14 \end{bmatrix}$$

Dolazimo do sustava:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & & & 3z & & & = & 14 \\ & & y & & & + & 3v & = & 7 \\ -2x & & & - & 6z & & & = & -28 \\ & - & 2y & & & - & 6v & = & -14 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrrrcr} 1 & 0 & 3 & 0 & | & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & | & 7 \\ -2 & 0 & -6 & 0 & | & -28 \\ 0 & -2 & 0 & -6 & | & -14 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ {\scriptstyle I \cdot 2 + III} \\ {\scriptstyle II \cdot 2 + IV} \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrrcr} 1 & 0 & 3 & 0 & | & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & | & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow x &= 14 \; -3z \\ y &= \;\;7 \; -3v, \quad z,\ v \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow X = \begin{bmatrix} 14 - 3z & 7 - 3v \\ z & v \end{bmatrix}, \quad z,\ v \in \mathbb{R}$$

□

Zadatak 1.83. *Riješite matričnu jednadžbu $AX + I = A + BX$, za*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

$$AX - BX = A - I$$
$$(A - B)X = A - I$$
$$CX = D, \quad C := A - B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \; D := A - I = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det C = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \text{postoji } C^{-1}$$
$$\Rightarrow X = C^{-1}D$$
$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

□

Zadatak 1.84. *Riješite matričnu jednadžbu $AX + C = XB$, za*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

$AX - XB = -C \quad \rightarrow$ ne možemo izlučiti X (nekomutativnost)!

$$\Longrightarrow \text{uzmemo } X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & v \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & y \\ z & v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 2x & 2y \\ -x + z & -y + v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & -y \\ z & -v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} x & 3y \\ -x & -y + 2v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dolazimo do sustava:

$$\begin{aligned} x =& 1 \quad \Rightarrow x = 1 \\ 3y =& 6 \quad \Rightarrow y = 2 \\ -x =& -1 \quad \checkmark \\ -y + 2v =& 0 \quad \Rightarrow v = 1 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ z & 1 \end{bmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}$$

□

Zadatak 1.85. *Odredite sve matrice B koje komutiraju s matricom A,*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

Uzmemo $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & v \end{bmatrix}$. Tada je:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & v \\ x & y \end{bmatrix},$$
$$B \cdot A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & x \\ v & z \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow z =& y \\ v =& x \\ x =& v \\ y =& z \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow B = \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}, \quad x,\ y \in \mathbb{R}$$

□

1.9 Problem linearnog programiranja. Grafičko rješenje.

<u>**Problem:**</u> Zadana je neka funkcija (tzv. **funkcija cilja**) kojoj treba odrediti maksimum, odnosno minimum na zadanom skupu. Skup je zadan nejednakostima (tzv. **ograničenjima**). Naša metoda je grafička.

Primjer 1.86. *Odrediti* $\max\{x + y\}$*, uz uvjet*

$$\begin{aligned} x + 3y &\le 6, \\ x,\ y &\ge 0. \end{aligned}$$

Rješenje.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x+y$ → funkcija cilja (njoj tražimo maksimum)

$$\left.\begin{aligned} x + 3y \le 6 \\ x,\ y \ge 0 \end{aligned}\right\} \text{ograničenja}$$

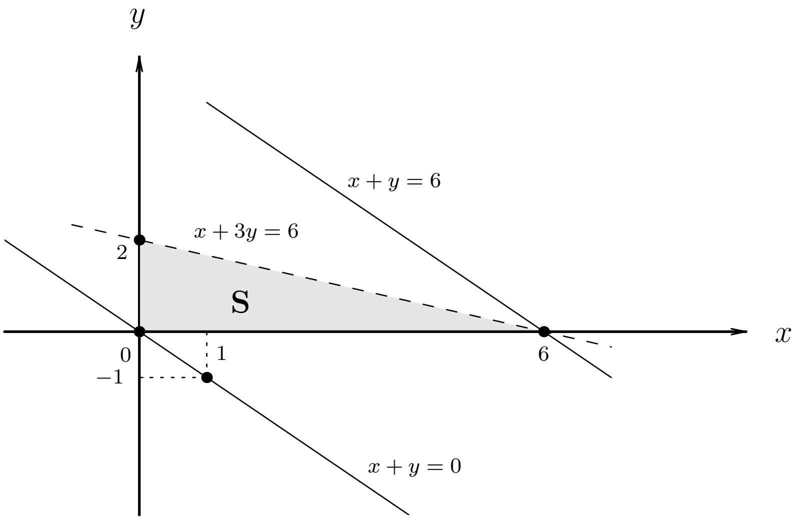
•Metoda:

Prvo u koordinatnoj ravnini nacrtamo skup S određen ograničenjima. To je skup mogućih rješenja.

Sada duž skupa S povlačimo paralelne pravce $f(x) = konst.$ i gledamo koju maksimalnu konstantu možemo postići, a da odgovarajući pravac siječe skup S u jednoj ili više točaka. Ta konstanta je maksimum funkcije f na skupu S, a točka (ili točke) presjeka su točke ravnine u kojima se taj maksimum postiže.

Crtamo:

$x + 3y = 6$	$x + y = 0$
$x = 0 \ \Rightarrow y = 2$	$x = 0 \ \Rightarrow y = 0$
$y = 0 \ \Rightarrow x = 6$	$x = 1 \ \Rightarrow y = -1$



Iz slike očitavamo:

$$(x^*, y^*) = (6, 0), \quad f^* = 6.$$

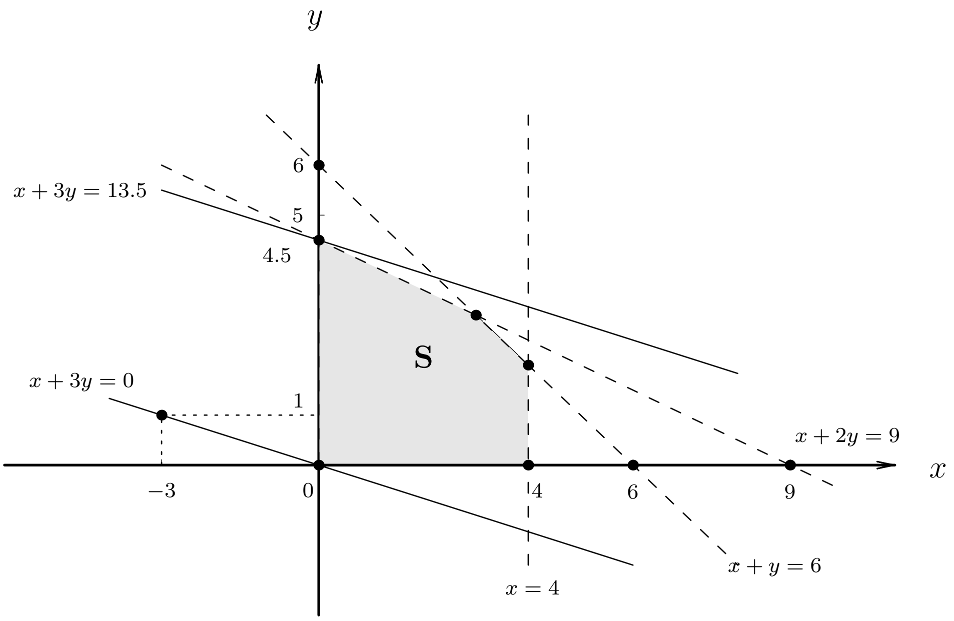
□

Primjer 1.87. *Odrediti* $\max\{x + 3y\}$, *uz uvjet*

$$\begin{aligned} x + 2y &\le 9, \\ x + y &\le 6, \\ x &\le 4, \\ x,\ y &\ge 0. \end{aligned}$$

Rješenje.
Postupak je analogan onom u prethodnom primjeru.
Crtamo skup S i skup paralelnih pravaca $x + 3y = const.$:

$$\begin{array}{llllllll}
x+2y & = 9 & \qquad & x+y & = 6 & \qquad & x+3y & = 0 \\
x=0 & \Rightarrow y=4.5 & & x=0 & \Rightarrow y=6 & & x=0 & \Rightarrow y=0 \\
y=0 & \Rightarrow x=9 & & x=6 & \Rightarrow y=0 & & x=-3 & \Rightarrow y=1
\end{array}$$



Iz slike očitavamo:

$$(x^*, y^*) = (0, 4.5), \quad f^* = 13.5.$$

□

Primjer 1.88. *Pretpostavimo da ste uštedjeli svotu od 5000 kn koju sada želite oročiti u banci tako da dobijete i neke kamate na njih. Banka A odobrava* 6% *godišnjih kamata, a banka B* 10% *godišnjih kamata. No, kako je banka A starija i sigurnija, prihvaćate strategiju da u banku A uložite najmanje tri puta više nego u banku B. Sastavite linearni program koji će osigurati maksimalne godišnje kamate i riješite ga grafičkom metodom.*

Rješenje.
Varijable odlučivanja su:

$x-$ količina novca uložena u banku A,
$y-$ količina novca uložena u banku B.

Ograničenja:

$$\begin{aligned} x+y &\leq 5000 && \text{(nemamo više od 5000 kn)}, \\ x &\geq 3y && \text{(radi veće sigurnosti banke } A\text{)}, \\ x,\ y &\geq 0 && \text{(nenegativne količine novca)}. \end{aligned}$$

Kamate u banci A:
6% od $x = \frac{6}{100} \cdot x = 0.06x$
Kamate u banci B:
10% od $y = \frac{10}{100} \cdot y = 0.1y$
$\Longrightarrow$ Ukupne kamate: $0.06x + 0.1y \quad \longrightarrow \max$

Dakle, dolazimo do linearnog programa:
Odrediti $\max\{0.06x + 0.1y\}$, *uz uvjet*

$$\begin{aligned} x+y &\leq 5000, \\ x-3y &\geq 0, \\ x,\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

□

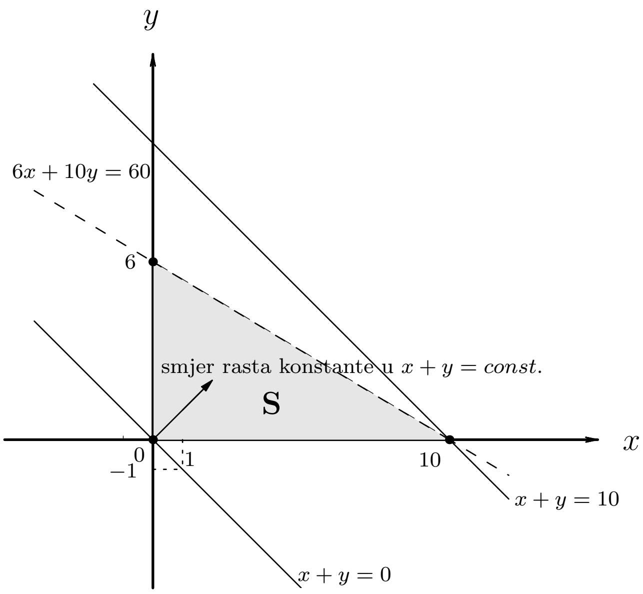
Zadatak 1.89. *Zamislimo da želite napraviti proslavu svog rođendana i od pića planirate crno i bijelo vino. Vidjeli ste u nekoj vinariji crno vino za 6 kn/L i bijelo za 10 kn/L. Vi u džepu imate samo 60 kn.*
a) Nema dodatnih zahtjeva na kupovinu vina.
b) Znate da će neki sigurno piti bijelo vino pa odlučite kupiti barem 3L bijelog vina.
c) Kupite barem 3L bijelog vina i osim toga vam je 3 puta draže bijelo od crnog vina.
Odredite koliko kojeg vina kupiti u svakom od slučajeva, a da pritom postignemo što veću korisnost (tj. da ukupna kupljena količina bude što je veća moguća).

Rješenje. Označimo sa x količinu crnog, a sa y bijelog vina koje ćemo kupiti. Sva tri slučaja vode na <u>problem linearnog programiranja</u>.

a)

$$\max\{x+y\},\ \text{uz uvjet}$$
$$\begin{aligned} 6x + 10y &\leq 60, \\ x,\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll} x + 10y & = 60 & \\ x = 0 & \Rightarrow y = 6 & (0,6) \\ y = 0 & \Rightarrow x = 10 & (10,0) \end{array} \qquad \begin{array}{lll} x + y & = 0 & \\ x = 0 & \Rightarrow y = 0 & (0,0) \\ x = 1 & \Rightarrow y = -1 & (1,-1) \end{array}$$



Iz slike očitavamo:

$$(x^*, y^*) = (10, 0)$$

(to je sjecište sa skupom S "najdaljeg" (u smjeru rasta konstante) pravca iz familije $x + y = const.$ koji još uvijek siječe skup S)

Kupit ćemo 10L crnog vina.

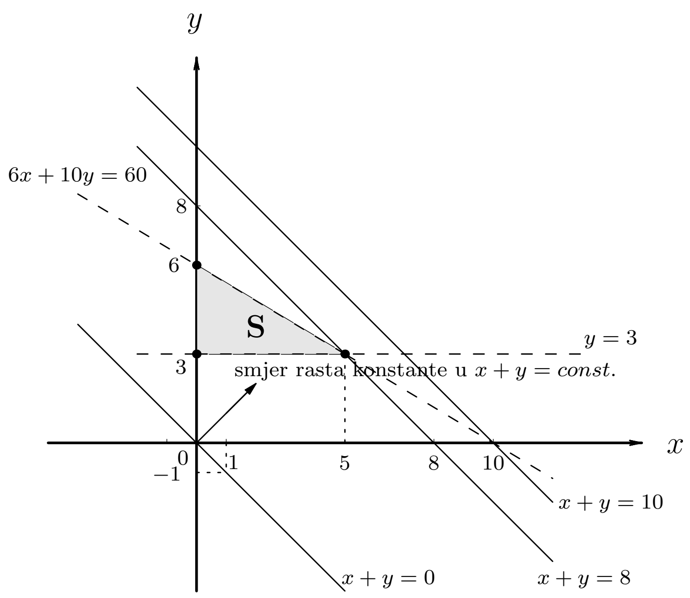
b)

$$\max\{x + y\}, \text{ uz uvjet}$$
$$6x + 10y \leq 60,$$
$$y \geq 3$$
$$x,\ y \geq 0.$$

Tražimo presjek pravca $y = 3$ i $6x + 10y = 60$:

$$6x + 10 \cdot 3 = 60 \ \Rightarrow\ x = 5,\ y = 3 \ \Rightarrow\ (5, 3).$$

Kroz $(5, 3)$ prolazi pravac $x + y = 8$ iz familije $x + y = const.$



Iz slike očitavamo:

$$(x^*, y^*) = (5, 3)$$

(to je sjecište sa skupom S "najdaljeg" (u smjeru rasta konstante) pravca iz familije $x + y = const.$ koji još uvijek siječe skup S)

Kupit ćemo 5L crnog vina i 3L bijelog.

c)

$$\max\{x + 3y\}, \text{ uz uvjet}$$

$$\begin{aligned} 6x + 10y &\leq 60, \\ y &\geq 3 \\ x,\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

$x + 3y = 0$

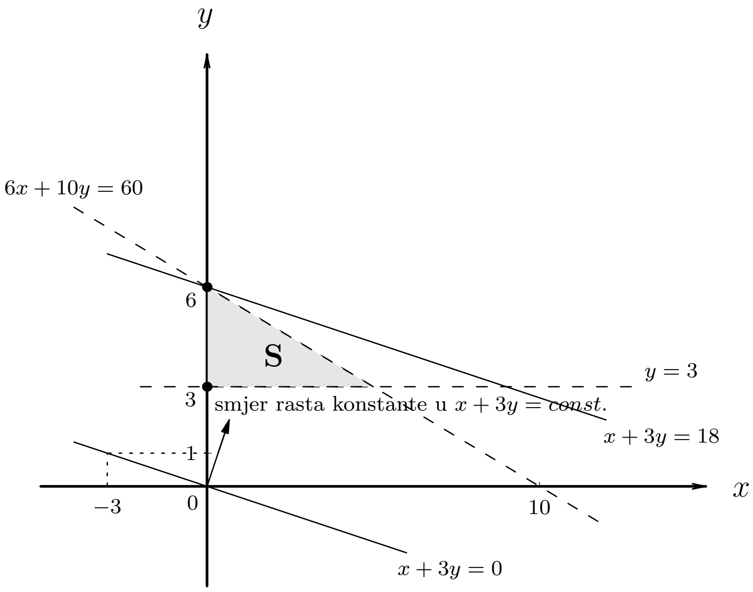
$$\begin{array}{llll} x & = 0 \Rightarrow y = 0 & (0, 0) \\ y & = 1 \Rightarrow x = -3 & (-3, 1) \end{array}$$

Iz slike očitavamo:

$$(x^*, y^*) = (0, 6)$$

(to je sjecište sa skupom S "najdaljeg" (u smjeru rasta konstante) pravca iz familije $x + 3y = const.$ koji još uvijek siječe skup S)

Kupit ćemo 6L bijelog vina.



□

Zadatak 1.90. *Riješite problem linearnog programiranja:*

$$\begin{aligned} \min\{x_1 + 4x_2\}, \ \ &\textit{uz uvjet} \\ x_1 + x_2 &\geq 2, \\ x_1 + x_2 &\leq 6, \\ x_1, \ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

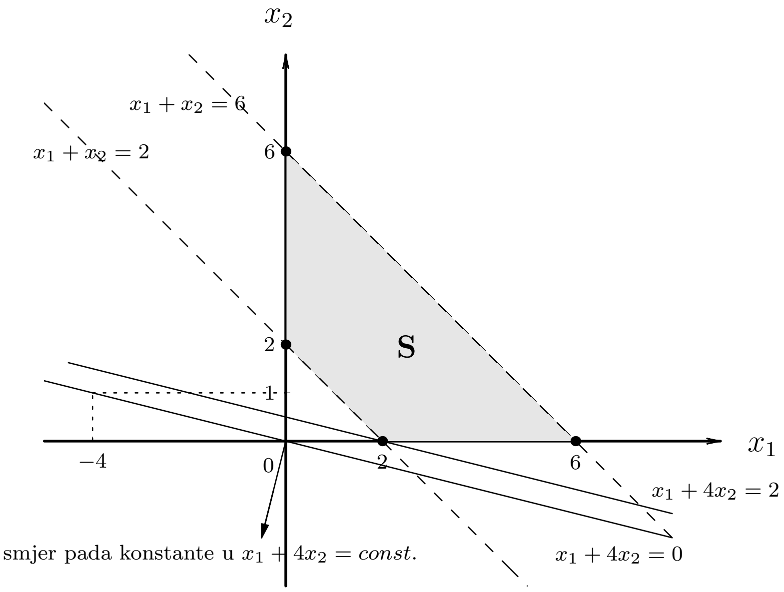
Rješenje.

$$\begin{array}{llllllll} x_1 + x_2 & = 2 & & x_1 + x_2 & = 6 & & x_1 + 4x_2 & = 0 \\ x_1 = 0 & \Rightarrow x_2 = 2 & & x_1 = 0 & \Rightarrow x_2 = 6 & & x_1 = 0 & \Rightarrow x_2 = 0 \\ x_2 = 0 & \Rightarrow x_1 = 2 & & x_1 = 6 & \Rightarrow x_2 = 0 & & x_2 = 1 & \Rightarrow x_1 = -4 \end{array}$$

Iz slike očitavamo:

$$(x_1^*, x_2^*) = (2, 0), \ f^* = 2$$

(to je sjecište sa skupom S "najdaljeg"(u smjeru PADA (!min!) konstante) pravca iz familije $x_1 + 4x_2 = \textit{const.}$ koji još uvijek siječe skup S) □



1.10 Input-output analiza

Neka je dana *input-output tablica*

Q_i	Q_{ij}	q_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

,

gdje je

Q_i = količina outputa proizvedenog u i-tom sektoru,
Q_{ij} = količina outputa i-tog sektora koja prelazi u j-ti sektor
= međusektorska potražnja,
q_i = količina finalne potražnje i-tog sektora
= finalna potrošnja i-tog sektora (tržiste proizvoda i izvoz).

Nadalje, neka je za svaki sektor i dana ili planirana količina proizvodnje (novi Q_i) ili planirana količina finalne potražnje (novi q_i).

Tada novu input-output tablicu računamo slijedećim algoritmom:

1. Izračunamo matricu tehničkih koeficijenata $A = [a_{ij}] = [\frac{Q_{ij}}{Q_j}]$ i matricu tehnologije $T = I - A$ iz "starih" varijabli.
   Koeficijent a_{ij} kaže koliko jedinica outputa treba doći iz i-tog sektora u j-ti sektor za proizvodnju jedne jedinice outputa u j-tom sektoru.
   Matrica A, odnosno T, je karakteristika neke ekonomije i time konstantna za tu ekonomiju.

2. Riješimo sustav jednadžbi ravnoteže $TQ = q$ za nove varijable.

3. Iz relacije $Q_{ij} = a_{ij}Q_j$ odredimo novu međusektorsku potražnju.

Teorem:
Ukoliko zadani elementi nove input-output tablice predstavljaju proporcionalnu promjenu u odnosu na elemente stare input-output tablice, onda će se upravo za taj faktor proporcionalnosti promijeniti svi elementi input-output tablice.

Kritika modela:
Input-output analiza pretpostavlja podjelu ekonomije neke zemlje na n proizvodnih sektora koji svi funkcioniraju u uvjetima ravnoteže ponuda=potražnja, pa nema ni zaliha ni nestašica.
Nadalje, kao ulazni podatak koristi planirane (željene) količine proizvodnje uz potpuno zanemarivanje cijena (time vrijednosti i profita), a to su karakteristike planske netržisne poljoprivrede.
Na kraju spomenimo i to da model (iako se koristi u svrhu postizanja u budućnosti željenog stanja ekonomije) u potpunosti odbacuje mogućnost tehnološkog napretka. Naime, konstantnost tehnoloških koeficijenata ekvivalentna je nepromjenjivosti tehnoloških uvjeta.

Nama su najznačajnije sljedeće formule:

$$\boxed{\begin{array}{ll} Q_i = & \sum_j Q_{ij} + q_i \\ Q_{ij} = & a_{ij}Q_j \end{array}} \Rightarrow Q_i = \sum_j a_{ij}Q_j + q_i \Rightarrow Q = AQ - q \Rightarrow (I - A)Q = q$$

Zadatak 1.91. *Zadana je matrica tehničkih koeficijenata*

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.15 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.25 \\ 0.2 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$$

i vektor ukupnih outputa

$$Q = \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}.$$

Sastavite pripadnu input-output tablicu.

Rješenje.

$$\begin{aligned} Q_{ij} &= a_{ij} Q_j, \\ q_i &= Q_i - \sum_j Q_{ij} \end{aligned} \quad \Longrightarrow$$

Q_i	Q_{ij}			q_i
100	20	30	10	40
200	10	60	25	105
100	20	40	10	30

□

Zadatak 1.92. *Zadana je input-output tablica jedne trosektorske ekonomije:*

Q_i	Q_{ij}			q_i
100	30	30	30	q_1
150	30	20	60	q_2
150	20	30	40	q_3

.

Ako se planira novi vektor ukupnih outputa

$$Q_{novi} = \begin{bmatrix} 110 \\ 165 \\ 165 \end{bmatrix},$$

a tehnološki uvjeti se ne mijenjaju, sastavite novu input-output tablicu.

Rješenje.

$$q_i = Q_i - \sum_{i=1}^{3} Q_{ij} \quad \Rightarrow q = \begin{bmatrix} 10 \\ 40 \\ 60 \end{bmatrix}$$

$$Q_{novi} = 1.1 \cdot Q \quad \overset{\text{Tm.}}{\Longrightarrow}$$

Q_i	Q_{ij}			q_i
110	33	33	33	11
165	33	22	66	44
165	23	33	44	66

□

Zadatak 1.93. *Zadana je input-output tablica jedne trosektorske ekonomije:*

Q_i	Q_{ij}			q_i
100	10	40	30	20
200	20	40	60	80
300	30	40	120	110

.

Ako se planira nova finalna potražnja

$$q_{novi} = \begin{bmatrix} 24 \\ 96 \\ 132 \end{bmatrix},$$

a tehnološki uvjeti se ne mijenjaju, sastavite novu input-output tablicu.

Rješenje.

$$q_{novi} = 1.2 \cdot q \qquad \overset{\text{Tm.}}{\Longrightarrow}$$

Q_i	Q_{ij}			q_i
120	12	48	36	24
240	24	48	72	96
360	36	48	144	132

□

Zadatak 1.94. *Zadana je matrica tehničkih koeficijenata*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$$

i vektor finalne potražnje

$$q = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 19 \end{bmatrix} .$$

Sastavite pripadnu input-output tablicu.

Rješenje.

$$\begin{aligned} T &= I - A = \begin{bmatrix} 1 & -0.1 & -0.2 \\ -0.3 & 0.8 & -0.4 \\ -0.2 & -0.3 & 0.9 \end{bmatrix} \\ Q &= T^{-1}q = \frac{1}{0.515} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.15 & 0.2 \\ 0.35 & 0.86 & 0.46 \\ 0.25 & 0.32 & 0.77 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sada iz $Q_{ij} = a_{ij}Q_j$ dobivamo

Q_i	Q_{ij}			q_i
10	0	2	6	2
20	3	4	12	1
30	2	6	3	19

.

Napomena:

Umjesto da računamo inverz matrice T, vektor q smo alternativno mogli dobiti rješavajući sustav $TQ = q$:

1	-0.1	-0.2	2	$/\cdot 10$
-0.3	0.8	-0.4	1	$/\cdot 10$
-0.2	-0.3	0.9	19	$/\cdot 10$
10	-1	-2	20	
-3	8	-4	10	$8 \cdot I + II$
-2	-3	9	190	$(-3) \cdot I + III$
10	-1	-2	20	
77	0	-20	170	$/\cdot(-\frac{1}{10})$
-32	0	15	130	$/\cdot(-2)$
10	-1	-2	20	$II + I$
-7.7	0	2	-17	
64	0	-30	-260	$15 \cdot II + III$
2.3	-1	0	3	$/\cdot(-1)$
-7.7	0	2	-17	$/\cdot\frac{1}{2}$
-51.5	0	0	-515	$/\cdot(-\frac{1}{51.5})$
-2.3	1	0	-3	$2.3 \cdot III + I$
-3.85	0	1	-8.5	$3.85 \cdot III + II$
1	0	0	10	
0	1	0	20	
0	0	1	30	
1	0	0	10	

$\square$

Zadatak 1.95. *Zadana je input-output tablica neke dvosektorske ekonomije:*

Q_i	Q_{ij}		q_i
200	40	50	110
100	80	0	20

.

Napišite novu input-output tablicu ako je vektor finalne potražnje

$$q = \begin{bmatrix} 120 \\ 60 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.
Računamo

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix}, \quad T = I - A = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix}.$$

$$TQ_{novi} = q_{novi} \quad \Longrightarrow Q_{novi} = T^{-1}q_{novi} = \frac{1}{\frac{3}{5}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 120 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 \\ 160 \end{bmatrix}$$

Sada iz $Q_{ij} = a_{ij}Q_j$

$$\Longrightarrow$$

Q_i	Q_{ij}		q_i
250	50	80	120
160	100	0	60

$\square$

Zadatak 1.96. *Zadana je input-output tablica:*

Q_i	Q_{ij}			q_i
Q_1	50	20	30	0
Q_2	100	100	50	150
Q_3	50	20	50	80

.

Ako se planiraju nove proizvodnje $Q_1 = 110$ *i* $Q_3 = 220$*, te nova finalna potražnja* $q_2 = 165$*, a tehnološki uvjeti se ne mijenjaju, sastavite novu input-output tablicu.*

Rješenje.

$$Q_i = \sum_{i=1}^{3} Q_{ij} + q_i, \quad \text{za svaki } i \quad \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} 100 \\ 400 \\ 200 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{novi } Q_1 &= 1.1 \cdot Q_1 \\ \text{novi } q_2 &= 1.1 \cdot q_2 \\ \text{novi } Q_3 &= 1.1 \cdot Q_3 \end{aligned} \quad \overset{\text{Tm.}}{\Longrightarrow}$$

Q_i	Q_{ij}			q_i
110	55	22	33	0
440	110	110	55	165
220	55	22	55	88

$\square$

Zadatak 1.97. *Zadana je matrica tehničkih koeficijenata*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix},$$

ukupni outputi $Q_1 = 10$ *i* $Q_3 = 30$*, te finalna potražnja* $q_2 = 1$.
Sastavite pripadnu input-output tablicu.

Rješenje.

$$
\begin{aligned}
Q_{ij} &= a_{ij}Q_j, \text{ za } j = 1, 3, \text{ za svaki } i \\
Q_2 &= 3 + 0.2Q_2 + 12 + 1 \quad \Rightarrow Q_2 = 20 \\
Q_{i2} &= a_{i2}Q_2, \text{ za svaki } i \\
q_i &= Q_i - \sum_{i=1}^{3} Q_{ij}, \ i = 1, 3
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$

Q_i	Q_{ij}			q_i
10	0	2	6	2
20	3	4	12	1
30	2	6	3	19

□

Zadatak 1.98. *Zadana je matrica tehničkih koeficijenata*

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}.
$$

Ukupna proizvodnja prvog sektora je $Q_1 = 500$*, drugog* $Q_2 = 300$*, a finalna potražnja drugog sektora je* $q_2 = 100$*.*
Sastavite pripadnu input-output tablicu.

Rješenje.

$$
\begin{aligned}
Q_{ij} &= a_{ij}Q_j, \text{ za } j = 1, 2, \text{ za } i = 1, 2, 3 \\
Q_{23} &= Q_2 - Q_{21} - Q_{22} - q_2 \\
Q_3 &= \frac{Q_{23}}{a_{23}} \\
Q_{13} &= a_{13}Q_3 \\
Q_{33} &= a_{33}Q_3 \\
q_i &= Q_i - \sum_{i=1}^{3} Q_{ij}, \ i = 1, 3
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$

Q_i	Q_{ij}			q_i
500	0	60	75	365
300	50	0	150	100
375	100	120	0	155

□

Zadatak 1.99. *Zadana je matrica tehnologije neke trosektorske ekonomije:*

$$T = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.4 & -0.3 \\ -0.3 & 1 & -0.2 \\ -0.2 & -0.4 & 1 \end{bmatrix}$$

Sastavite input-output tablicu ako je ukupna proizvodnja prvog sektora $Q_1 = 100$*, a finalna potražnja drugog i trećeg sektora* $q_2 = 20$ *i* $q_3 = 6$*.*

Rješenje.

$$T = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.4 & -0.3 \\ -0.3 & 1 & -0.2 \\ -0.2 & -0.4 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow A = I - T = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_{i1} = a_{i1}Q_1, \ i = 1,2,3$$

$$\left.\begin{array}{l} Q_2 = 30 + 0.2Q_3 + 20 \\ Q_3 = 20 + 0.4Q_2 + \ 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad Q_3 = 50, \ Q_2 = 60$$

$$100 = 10 + 0.4Q_2 + 0.3Q_3 + q_1 \quad \Rightarrow \quad q_1 = 51$$

$\Longrightarrow$

Q_i	Q_{ij}			q_i
100	10	24	15	51
60	30	0	10	20
50	20	24	0	6

□

Zadatak 1.100. *Zadana je input-output tablica neke dvosektorske ekonomije:*

Q_i	Q_{ij}		q_i
Q_1	600	1200	600
Q_2	1200	1200	1200

.

Odredite novi vektor ukupnih outputa ako se finalna potražnja prvog sektora poveća, a drugog sektora smanji za 10%*. Također, sastavite novu input-output tablicu.*

Rješenje.

$$Q_i \ = \ \sum_{j=1}^{2} Q_{ij} + q_i, \text{ za svaki } i \quad \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} 2400 \\ 3600 \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = \frac{Q_{ij}}{Q_j} \quad \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow T \ = \ I - A \ = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

novi $q_1 = 1.1 \cdot q_1 = 660$
novi $q_2 = 0.9 \cdot q_2 = 1080$

Rješavamo sustav $TQ = q$ za nove varijable:

$$
\begin{array}{|cc|c|l}
\hline
\frac{3}{4} & -\frac{1}{3} & 660 & /\cdot 12 \\
-\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 1080 & /\cdot 6 \\
\hline
9 & -4 & 7920 & II+I \\
-3 & 4 & 6480 & \\
\hline
6 & 0 & 14400 & /\cdot \frac{1}{6} \\
-3 & 4 & 6480 & 3\cdot I+II \\
\hline
1 & 0 & 2400 & /\cdot 12 \\
0 & 4 & 13680 & /\cdot \frac{1}{4} \\
\hline
\end{array}
\qquad \Rightarrow \text{novi } Q = \begin{bmatrix} 2400 \\ 3420 \end{bmatrix}.
$$

Napomena:
Alternativno smo novi Q mogli dobiti iz

$$Q = T^{-1}q = 3 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 660 \\ 1080 \end{bmatrix}.$$

$Q_{ij} = a_{ij}Q_j \quad \Rightarrow$

Q_i	Q_{ij}		q_i
2400	600	1140	660
3420	1200	1140	1080

□

Zadatak 1.101. *Zadana je matrica tehnologije*

$$T = \begin{bmatrix} \frac{7}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{16}{25} & \frac{7}{10} \end{bmatrix},$$

ukupni output prvog sektora $Q_1 = 50$ *i finalna potražnja drugog sektora* $q_2 = 17$. *Sastavite pripadnu input-output tablicu.*

Rješenje.

$$A = I - T = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{16}{25} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

$$TQ = q \iff \begin{array}{r} \frac{7}{10}50 - \frac{1}{5}Q_2 = q_1 \\ -\frac{16}{25}50 + \frac{7}{10}Q_2 = 17 \end{array} \iff \begin{array}{c} q_1 = 21 \\ Q_2 = 70 \end{array}$$

Sada iz $Q_{ij} = a_{ij}Q_j$

$\Longrightarrow$

Q_i	Q_{ij}		q_i
50	15	14	21
70	32	21	17

.

$\square$

Zadatak 1.102. *Zadana je input-output tablica*

Q_i	Q_{ij}		q_i
200	40	80	80
240	80	60	100

.

Ako se ukupni output prvog sektora smanji za 10%*, a drugog poveća za* 20%*, za koliko* % *se promijeni finalna potražnja pojedinih sektora?*

Rješenje.

novi $Q_1 = 0.9Q_1 = 180$
novi $Q_2 = 1.2Q_2 = 288$

Računamo:

$$A = A = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad T = I - A = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$q_{novi} = TQ_{novi} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 180 \\ 288 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 \\ 144 \end{bmatrix}$$

$\Longrightarrow$ U prvom sektoru se smanji 40%, a u drugom se poveća 44%. $\square$

Zadatak 1.103. *Zadana je inverzna matrica tehnologije,*

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{10}{3} \end{bmatrix}.$$

Izračunajte matricu A tehničkih koeficijenata.

Rješenje.

$$T = I - A = \frac{1}{\frac{60}{9}} \begin{bmatrix} \frac{10}{3} & -\frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$ $\square$

Zadatak 1.104. *Napišite input-output tablicu ako je:*

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow T = \frac{1}{\frac{5}{2}} \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow A = T - I = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$Q_{ij} = a_{ij}Q_j, \ \forall i, \ j$
$q_i = Q_i - \sum_{j=1}^{2} Q_{ij}, \ \forall i$

$\Longrightarrow$

Q_i	Q_{ij}		q_i
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$
2	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$

□

Zadatak 1.105. *Zadana je inverzna matrica tehnologije*

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{20} & 1 & 0 \\ \frac{3}{200} & \frac{3}{10} & 1 \end{bmatrix}.$$

a) *Ako su ukupni outputi*

$$Q = \begin{bmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{bmatrix},$$

sastavite pripadnu input-output tablicu.

b) *Ako je poznato* $Q_1 = 200$, $Q_2 = 100$, $q_3 = 270$, *sastavite pripadnu input-output tablicu.*

Rješenje. **a)** Istovremeno rješavamo $T^{-1}q = Q$ i $T^{-1}T = I$:

1	0	0	200	1	0	0	
$\frac{1}{20}$	1	0	100	0	1	0	$(-\frac{1}{20})\cdot I+II$
$\frac{3}{200}$	$\frac{3}{10}$	1	300	0	0	1	$(-\frac{3}{10})\cdot II+III$
1	0	0	200	1	0	0	
0	1	0	90	$-\frac{1}{20}$	1	0	
0	0	1	270	0	$-\frac{3}{10}$	1	

$$\Longrightarrow q=\begin{bmatrix}200\\90\\270\end{bmatrix},\quad T=\begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{20}&1&0\\0&-\frac{3}{10}&0\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}0&0&0\\\frac{1}{20}&0&0\\0&\frac{3}{10}&0\end{bmatrix}$$

$$Q_{ij}=a_{ij}Q_j \qquad \Longrightarrow$$

Q_i	Q_{ij}			q_i
200	0	0	0	200
100	10	0	0	90
300	0	30	0	270

b) $Q_{ij}=a_{ij}Q_j,\ j=1,\ 2,$ za svaki i $\Longrightarrow$

Q_i	Q_{ij}			q_i
200	0	0	0	200
100	10	0	0	90
300	0	30	0	270

□

Zadatak 1.106. *Zadana je inverzna matrica tehnologije*

$$T^{-1}=\frac{5}{6}\begin{bmatrix}3&3\\2&4\end{bmatrix},$$

međusektorska potrošnja $Q_{12}=50$ *i finalna potražnja* $q_1=10$. *Sastavite pripadnu input-output tablicu.*

Rješenje.

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{5}{2}&\frac{5}{2}\\\frac{5}{3}&\frac{10}{3}\end{bmatrix}\Rightarrow I-A=T=\frac{1}{\frac{25}{6}}\begin{bmatrix}\frac{10}{3}&-\frac{5}{2}\\-\frac{5}{3}&\frac{5}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\\-\frac{2}{5}&\frac{3}{5}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}\frac{1}{5}&\frac{3}{5}\\\frac{2}{5}&\frac{2}{5}\end{bmatrix}$$

Računamo redom:

$$\begin{aligned}
Q_{12} =& a_{12}Q_2 \quad \Rightarrow \quad 50 = \frac{3}{5}Q_2 \quad \Rightarrow \quad Q_2 = \frac{250}{3} \\
Q_{22} =& a_{22}Q_2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{250}{3} = \frac{100}{3} \\
Q_1 =& a_{11}Q_1 + Q_{12} + q_1 \quad \Rightarrow \quad Q_1 = \frac{1}{5}Q_1 + 60 \quad \Rightarrow Q_1 = 75 \\
Q_{11} =& a_{11}Q_1 = \frac{1}{5}75 = 15 \\
Q_{21} =& a_{21}Q_1 = \frac{2}{5}75 = 30 \\
q_2 =& Q_2 - Q_{21} - Q_{22} = 20
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

Q_i	Q_{ij}		q_i
75	15	50	10
$\frac{250}{3}$	30	$\frac{100}{3}$	20

□

Zadatak 1.107. *Zadana je inverzna matrica tehnologije*

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.4 & 0.5 \\ 0.1 & 1.5 & 0.8 \\ 0.3 & 0.3 & 1.2 \end{bmatrix}.$$

Za koliko treba promijeniti ukupnu proizvodnju pojedinih sektora ako se finalna potražnja prvog sektora poveća za 20, drugog za 10, a trećeg smanji za 30 jedinica?

Rješenje.

novi $q_1 = q_1 + 20$
novi $q_2 = q_2 + 10$
novi $q_3 = q_3 - 30$

Kako je $Q = T^{-1}q$, vrijedi:

$$Q_{novi} = T^{-1}q_{novi} = T^{-1}(q + \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ -30 \end{bmatrix}) = Q + \begin{bmatrix} 1.2 & 0.4 & 0.5 \\ 0.1 & 1.5 & 0.8 \\ 0.3 & 0.3 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ -30 \end{bmatrix}.$$

$$\Longrightarrow Q_{novi} = Q + \begin{bmatrix} 13 \\ -7 \\ -27 \end{bmatrix}$$

□

Zadatak 1.108. *Zadana je matrica tehnologije*

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{10} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Napišite input-output tablicu ako znamo da je

$$q_1 = q_2 = q_3, \quad Q_1 + Q_2 + Q_3 = 544.$$

Rješenje.

$$A = I - T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ \frac{1}{25} & \frac{1}{5} & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = Q = T^{-1}q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ \frac{1}{25} & \frac{1}{5} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = q_1 \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{6}{5} \\ \frac{56}{25} \end{bmatrix}$$

$$544 = Q_1 + Q_2 + Q_3 = q_1(2 + \tfrac{6}{5} + \tfrac{56}{25}) = q_1 \tfrac{50+30+56}{25} = q_1 \tfrac{136}{25} = \tfrac{544 q_1}{100}$$

$$\Longrightarrow q_1 = 100 \quad \Longrightarrow Q = \begin{bmatrix} 200 \\ 120 \\ 224 \end{bmatrix}.$$

Sada iz $Q_{ij} = a_{ij} Q_j$

$\Longrightarrow$

Q_i	Q_{ij}			q_i
200	100	0	0	100
120	20	0	0	100
224	0	12	112	100

□

Poglavlje 2

REALNE FUNKCIJE JEDNE REALNE VARIJABLE

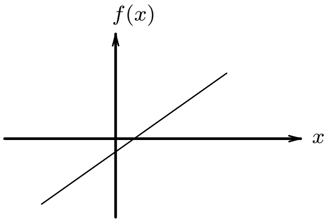
Funkciju $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zovemo **realnom funkcijom jedne realne varijable**.

2.1 Elementarne funkcije

- polinom

  - linearna funkcija (polinom 1. stupnja)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + b,\ a,\ b \in \mathbb{R}$$

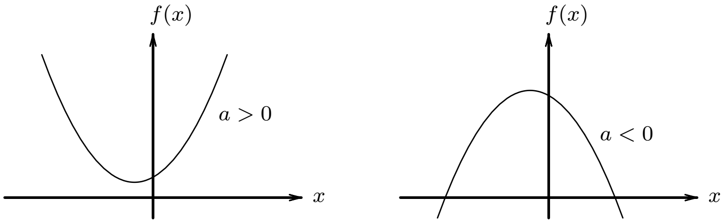


Slika 2.1: Linearna funkcija.

Pr. $y = f(x) = 2x + 1$

  - kvadratna funkcija (polinom 2. stupnja)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$$



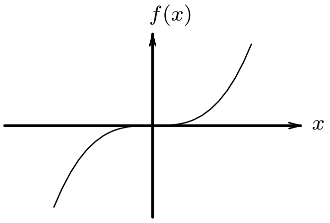
Slika 2.2: Kvadratna funkcija za $a > 0$ i $a < 0$.

Pr. $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$

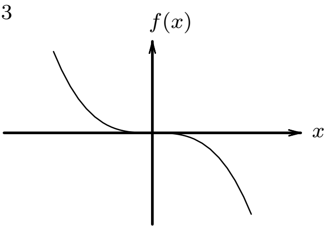
– <u>kubna funkcija (polinom 3. stupnja)</u>

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \ a, \ b, \ c, \ d \in \mathbb{R}$$

Pr. $f(x) = x^3$

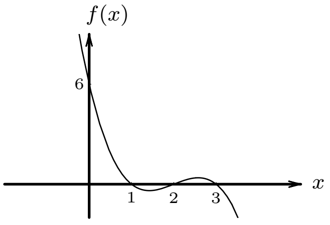


Pr. $f(x) = -x^3$



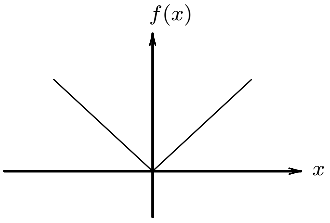
Pr. $f(x) = -(x-1)(x-2)(x-3)$

nultočke: $x_1 = 1, \ x_2 = 2, \ x_3 = 3$



- apsolutna vrijednost

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x \leq 0. \end{cases}$$

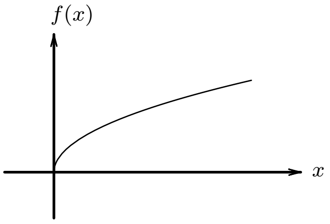


Slika 2.3: Funkcija apsolutne vrijednosti.

- Korijen

  - pozitivni drugi korijen (pozitivnog broja!)

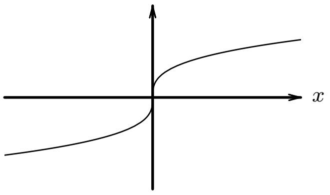
$$f : \ [0, +\infty\rangle \to [0, +\infty\rangle, \quad f(x) = \sqrt{x}$$



Slika 2.4: Pozitivni drugi korijen.

  - treći korijen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt[3]{x}$$



Slika 2.5: Treći korijen.

Napomena:
Promatramo funkciju n-tog korijena, $f(x) = \sqrt[n]{A(x)}$.
Prirodnu domenu te funkcije određujemo na sljedeći način:

- za n *paran* $\Rightarrow A(x) \geq 0$
- za n *neparan* $\Rightarrow A(x) \in \mathbb{R}$

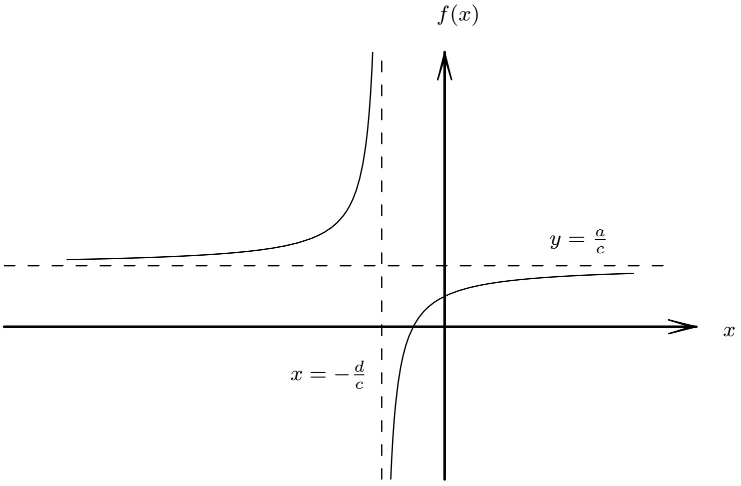
- razlomljena (racionalna) funkcija

$$\text{općenito:} \quad f(x) = \frac{\text{polinom stupnja } m}{\text{polinom stupnja } n}, \quad n \geq 1$$

$$\text{npr.} \quad f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \ c \neq 0 \qquad cx + d \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{d}{c}$$

$$\Rightarrow D = \mathbb{R} \backslash \{-\frac{d}{c}\}$$

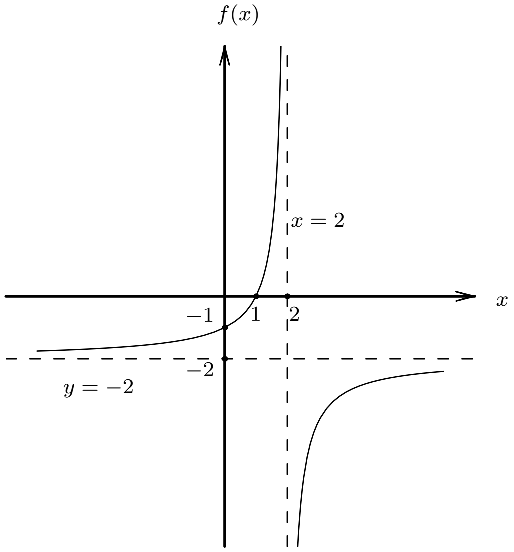
Pravac $x = -\frac{d}{c}$ je tzv. *vertikalna asimptota.*
Pravac $y = \frac{a}{c}$ je tzv. *horizontalna asimptota.*



Slika 2.6: Racionalna funkcija i njezine asimptote.

Pr. $f(x) = \frac{2x-2}{2-x} = \frac{2x-2}{-x+2}$

$$2 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$$
$$\Rightarrow D = \mathbb{R} \backslash \{2\}$$



Slika 2.7: Graf i asimptote funkcije $f(x) = \frac{2x-2}{2-x}$.

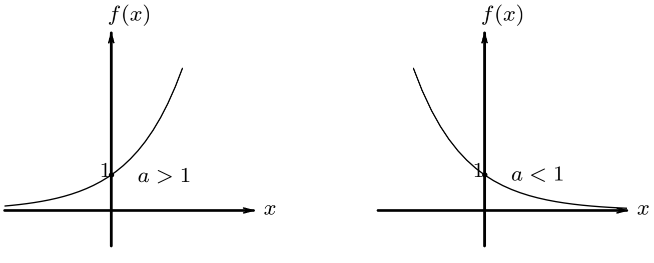
vertikalna asimptota ... $x = -\frac{d}{c} = -\frac{2}{-1} = 2$

horizontalna asimptota ... $y = \frac{a}{c} = \frac{2}{-1} = -2$

- eksponencijalna funkcija
  Općenita eksponencijalna funkcija je oblika:

$$f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = a^{A(x)} + b,\ A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Pr. $f(x) = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$



Slika 2.8: Graf funkcije $f(x) = a^x$ za $a > 1$, odn. za $a < 1$.

Pr. $y = e^x,\ e \approx 2.71$

- logaritamska funkcija
  Općenita logaritamska funkcija je oblika:

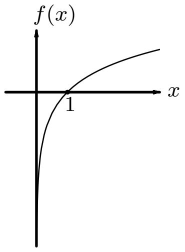
$$f(x) = \log_a A(x) + b, \quad a > 0,\ a \neq 1,\ A : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

pri čemu je njezina domena

$$D = \{x \in \mathbb{R} : A(x) > 0\}.$$

Pr. $a := e$

$$f(x) = \log_e x = (\text{oznaka}) = \ln x, \qquad D = \langle 0, +\infty \rangle$$



Slika 2.9: Graf funkcije $f(x) = \ln x$.

Pr. $a := 10$

$$f(x) = \log_{10} x = (\text{oznaka}) = \log x, \qquad D = \langle 0, +\infty \rangle$$

Napomena: Logaritamska funkcija je *inverzna funkcija* od odgovarajuće eksponencijalne funkcije, tj. vrijedi:

$$\begin{aligned} a^{\log_a x} &= x \quad \& \quad \log_a a^x = x, \\ \text{odn.} \qquad e^{\ln x} &= x \quad \& \quad \ln e^x = x. \end{aligned}$$

Primjer 2.1. *Odredite domenu funkcije:*

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{x-3}{x+1}}.$$

Rješenje.

Moraju biti zadovoljeni sljedeći uvjeti:

$x + 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq -1,$

$\frac{x-3}{x+1} \geq 0 \ , \qquad \sqrt{\frac{x-3}{x+1}} > 0.$

Sada crtamo tablicu predznaka za $\frac{x-3}{x+1}$:

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 \end{array} \right\} \text{nultočke brojnika, odn. nazivnika}$$

$\Longrightarrow$

	$\langle -\infty, -1\rangle$	$\langle -1, 3\rangle$	$\langle 3, +\infty\rangle$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
	$\oplus$	$-$	$\oplus$

$$\Rightarrow\ D = \langle -\infty, -1\rangle\ \cup\ \langle 3, +\infty\rangle$$

□

Napomena: Podsjetimo se da postoje i *trigonometrijske funkcije*, ali ih nećemo ovdje ponavljati.

2.2 Primjeri ekonomskih funkcija

Primjer 2.2. *Dana je funkcija proizvodnje* Q *u ovisnosti o* L, $Q(L) = 4\sqrt{L}$, *gdje je* L *količina rada. Izvedite funkciju proizvodnosti rada.*

Rješenje.

$$\frac{Q(L)}{L} = 4\frac{\sqrt{L}}{L} = \frac{4}{\sqrt{L}}$$

→ proizvodnost rada (proizvodnja po jedinici rada)

□

Primjer 2.3. *Dana je funkcija proizvodnje* Q *u ovisnosti o kapitalu* C, $Q(C) = 2.3C^{\frac{1}{3}}$. *Izvedite funkciju proizvodnosti kapitala.*

Rješenje.

$$\frac{Q(C)}{C} = \frac{2.3C^{\frac{1}{3}}}{C} = 2.3C^{-\frac{2}{3}} = \frac{2.3}{\sqrt[3]{C^2}}$$

→ proizvodnost kapitala (proizvodnja po jedinici kapitala)

□

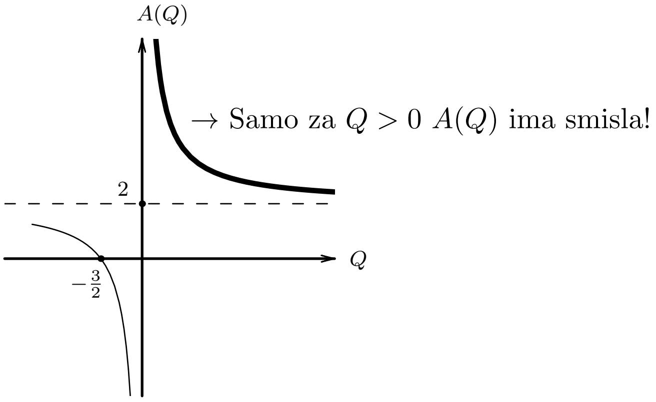
Primjer 2.4. *Zadana je funkcija ukupnih troškova nekog poduzeća,* $T(Q) = 2Q + 3$, *pri čemu je* Q *količina proizvodnje tog poduzeća. Izvedite i grafički prikažite funkciju prosječnih troškova. Za koje količine proizvodnje funkcije ukupnih i prosječnih troškova imaju ekonomskog smisla? Koliki su fiksni troškovi proizvodnje? Koje je ekonomsko značenje koeficijenta 2 u funkciji* $T(Q)$*?*

Rješenje.
Označimo sa $A(Q)$ funkciju prosječnih troškova (=troškova po jedinici proizvodnje). Tada je

$$A(Q) = \frac{T(Q)}{Q} = \frac{2Q+3}{Q}.$$

Radi se o razlomljenoj (racionalnoj) funkciji, čiji će graf biti hiperbola:

$x = -\frac{d}{c} = 0$ je okomita asimptota (tj. $Q = 0$),
$y = \frac{a}{c} = 2$ je vodoravna asimptota (tj. $A(Q) = 2$),
$D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$,
nultočke brojnika i nazivnika: $Q = -\frac{3}{2}$, $Q = 0$ (nije u domeni!).



Slika 2.10: Graf funkcije $A(Q)$.

Nadalje, ukupni troškovi imaju smisla za $Q \geq 0$ (proizvodnja nenegativna!). Prosječni troškovi imaju smisla za $Q > 0$ (0 nije u domeni, jer je nultočka nazivnika funkcije prosječnih troškova).

Fiksni troškovi:

$$Q = 0 \quad \Rightarrow \quad T(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3.$$

Ekonomsko značenje koeficijenta 2 u $T(Q)$:

$$\begin{aligned} Q \uparrow 1 \quad \Rightarrow \quad T(Q+1) &= 2(Q+1) + 3 \\ &= 2Q + 2 + 3 \\ &= (2Q+3) + 2 \\ &= T(Q) + 2, \end{aligned}$$

tj.

$$Q \uparrow 1 \quad \Rightarrow \quad T(Q) \uparrow 2.$$

To znači, ako proizvodnju povećamo za neki iznos, troškovi će se povećati za dvostruki taj iznos. □

Primjer 2.5. *Dane su funkcija potražnje* $Q(p) = -p + 20$*, gdje je* p *cijena proizvoda, i funkcija prosječnih troškova proizvodnje* $A(Q) = Q - 8 + \frac{80}{Q}$*, gdje je* Q *količina proizvoda. Odredite funkciju dobiti i interval rentabilne proizvodnje.*

Rješenje.
Prihod: $P(Q) = p \cdot Q$,
Ukupni troškovi: $T(Q) = A(Q) \cdot Q$,
Dobit: $D(Q) = P(Q) - T(Q)$.

Količina proizvoda koji su proizvedeni, Q, mora biti jednaka potražnji zbog tržišne ravnoteže.
Iz relacije $Q(p) = -p + 20$ izrazimo cijenu u terminima potražnje:

$$p(Q) = 20 - Q.$$

Sada računamo:

$$P(Q) = p \cdot Q = (20 - Q)Q = -Q^2 + 20Q,$$
$$T(Q) = A(Q) \cdot Q = Q(q - 8 + \frac{80}{Q}) = Q^2 - 8Q + 80.$$
$$\Rightarrow \; D(Q) = P(Q) - T(Q) = -2Q^2 + 28Q - 80. \quad \Rightarrow \text{parabola!}$$

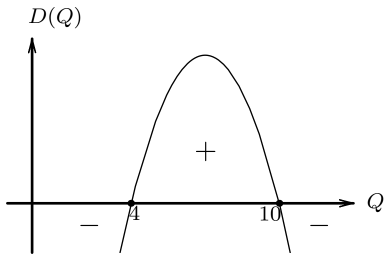
Proizvodnja će biti rentabilna ako vrijedi:

$$D(Q) \geq 0$$
$$-2Q^2 + 28Q - 80 \geq 0.$$

Izračunamo nultočke parabole:

$$Q_1 = 10, \;\; Q_2 = 4.$$

Zbog $a = -2 < 0$, parabola je okrenuta otvorom prema dolje.
Skiciramo i očitamo interval na kojem je $D(Q) \geq 0$:



$$\Rightarrow \; Q \in [4, 10]$$

□

2.3 Limes funkcije

Cilj: Neka je zadana funkcija $f(x)$. Htjeli bismo odrediti kojoj vrijednosti se približava $f(x)$ kada se x približava vrijednosti $a \in \mathbb{R}$, u oznaci:

$$\lim_{x\to a} f(x) = ?$$

- Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\infty} = 0, \ \frac{1}{0} &= \infty, \\
\infty + \infty &= \infty, \\
-\infty + (-\infty) &= -\infty, \\
\infty \cdot \infty &= \infty, \\
\infty \cdot (-\infty) &= -\infty, \\
a \cdot \infty &= \begin{cases} \infty, & a > 0; \\ -\infty, & a < 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

- Neodređeni izrazi (ne znamo ih izračunati!!!):
  $\infty - \infty, \ 0 \cdot \infty, \ \frac{\infty}{\infty}, \ \frac{0}{0}, \ 0^{\infty}, \ \infty^{\infty}, \ 0^0, \ 1^{\infty}$

- Za $a > 0$ vrijedi (vidi graf!):

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a < 1; \\ 1, & a = 1; \\ \infty, & a > 1. \end{cases}}$$

Primjer 2.6. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\infty} = 0.$

Primjer 2.7. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2^x} = \frac{1}{\infty} = 0.$

Primjer 2.8. $\lim_{x\to\infty} 2^x = \infty.$

Zadatak 2.9.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + x + 1}{2x^2 + 3} = \frac{\infty}{\infty} = \left(\frac{/ : x^2}{/ : x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{3}{x^2}} = \frac{2 + 0 + 0}{2 + 0} = 1.$$

Zadatak 2.10.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x+2}{x^2+2x} = \frac{\infty}{\infty} = \left(\frac{/ : x^3}{/ : x^3}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}} = \frac{1+0+0}{0+0} = \infty.$$

Zadatak 2.11.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+24}{100x^2+1} = \frac{\infty}{\infty} = \left(\frac{/ : x^2}{/ : x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}+\frac{24}{x^2}}{100+\frac{1}{x^2}} = \frac{0+0}{100+0} = 0.$$

Zadatak 2.12.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{3x^2+3x+2}}{x-1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{3x^2+3x+2}{(x-1)^2}} = \left(\sqrt{\frac{/ : x^2}{/ : x^2}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{3+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \sqrt{\frac{3+0+0}{1-0+0}} = \sqrt{3}$$

Zadatak 2.13.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+\sqrt{2x^3+2}}{x^2+x+1} = \frac{\infty}{\infty} = \left(\frac{/ : x^2}{/ : x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\sqrt{\frac{2x^3}{x^4}+\frac{2}{x^4}}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3+\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{2}{x^4}}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = 3.$$

Zadatak 2.14.

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\cdot(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) = \infty\cdot(\infty-\infty) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\cdot\frac{x+1-x}{\sqrt{(x+1)}+\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \left(\frac{/ : \sqrt{x}}{/ : \sqrt{x}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x}}+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}.$$

DZ 2.15. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+\sqrt{2x^4+2}}{x^2+x+1}=\ldots=3+\sqrt{2}$

DZ 2.16. $\lim_{x\to\infty}x\cdot(\sqrt{x^2+1}-x)=\ldots=\frac{1}{2}$

- Vrijedi:

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}=1\\ \lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{a}=\lim_{x\to\infty}a^{\frac{1}{x}}=a^0=1\end{array}}$$

Zadatak 2.17.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^x+7^{x+2}}{1+7^{x+3}}=\left(\frac{/:7^x}{/:7^x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{7}\right)^x+7^2}{\frac{1}{7^x}+7^3}=\frac{7^2}{7^3}=\frac{1}{7}.$$

- Vrijedi:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

Zadatak 2.18.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3=1\cdot 3=3.$$

Zadatak 2.19.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{3x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{(x-2)\cdot 3}=\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x-2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

Zadatak 2.20.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^2+1}=\frac{-1+1}{2}=0.$$

Zadatak 2.21.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x+6}{x^2-9}=\frac{6}{0}=\infty.$$

• Ako tražimo limes racionalne funkcije *u zajedničkoj nultočki brojnika i nazivnika* x_1, podijelimo brojnik i nazivnik polinomom $(x - x_1)$ (skratimo razlomak). Nakon toga limes se lako odredi uvrštavanjem vrijednosti x_1.

Zadatak 2.22.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-6x+4}{3x^2-12x+9} &= \frac{0}{0} = \lim_{x\to 1}\frac{2x^2-2x-4x+4}{3x^2-3x-9x+9} = \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{2x(x-1)-4(x-1)}{3x(x-1)-9(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{(2x-4)(x\not-1)}{(3x-9)(x\not-1)} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

DZ 2.23.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{x^2-1} = \frac{0}{0} = \ldots = \frac{3}{2}.$$

Zadatak 2.24.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-x^3}-\frac{1}{1-x}\right) &= \infty - \infty = \lim_{x\to 1}\frac{3-(1+x+x^2)}{1-x^3} = \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{2-x-x^2}{1-x^3} = \lim_{x\to 1}\frac{-x^2-x+2}{(1-x)(1+x+x^2)} = \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{-x^2+x-2x+2}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim_{x\to 1}\frac{x(1-x)+2(1-x)}{(1-x)(1+x+x^2)} = \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(1\not-x)}{(1\not-x)\,(1+x+x^2)} = \frac{3}{3} = 1.\end{aligned}$$

DZ 2.25.

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{2}{2-x}-\frac{4x}{4-x^2}\right) = \ldots = \frac{1}{2}.$$

• Ako računamo limes funkcije koja u brojniku i nazivniku ima komplicirane funkcije, nekad je možemo vrlo "elegantno" *supstitucijom* svesti na racionalnu funkciju.

Zadatak 2.26.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}\right) &= \frac{0}{0} = \left[\begin{array}{l}\textit{supstitucija:}\\ 1+x=t^6\\ x\to 0 \;\Leftrightarrow\; t\to 1\end{array}\right] = \\ &= \lim_{t\to 1}\frac{t^3-1}{t^2-1} = \lim_{t\to 1}\frac{(t\not-1)\,(t^2+t+1)}{(t\not-1)\,(t+1)} = \frac{1+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

DZ 2.27.

$$\lim_{x\to-1}\frac{1+\sqrt[5]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}=\ldots=\frac{3}{5}\qquad\qquad \left[\textit{supstitucija: } x=t^{15}\right]$$

Zadatak 2.28.

$$\lim_{x\to3}\frac{\log_3^2 x-1}{2\log_3 x-2}=\frac{0}{0}=\begin{bmatrix}\textit{supstitucija:}\\ t=\log_3 x\\ x\to3 \;\Leftrightarrow\; t\to1\end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{t\to1}\frac{t^2-1}{2t-2}=\lim_{t\to1}\frac{(t\cancel{-1})\,(t+1)}{2(t\cancel{-1})}=\frac{2}{2}=1.$$

Zadatak 2.29.

$$\lim_{x\to2}\frac{4^x-16}{16^x-256}=\frac{0}{0}=\begin{bmatrix}\textit{supstitucija:}\\ t=2^x\\ x\to2 \;\Leftrightarrow\; t\to4\end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{t\to4}\frac{t^2-16}{t^4-256}=\lim_{t\to4}\frac{(t^2\cancel{-16})}{(t^2\cancel{-16})(t^2+16)}=\frac{1}{32}.$$

- Ako računamo limes funkcije koja u brojniku ili nazivniku ima korijene, često koristimo metodu *racionalizacije* brojnika, odn. nazivnika.

Zadatak 2.30.

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to2}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x\cancel{-2}}{(x\cancel{-2})\,(\sqrt{x}+\sqrt{2})}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

- Vrijedi:

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k\\ k=1,\quad \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\end{array}}$$

Zadatak 2.31.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4+x}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^x=e^4.$$

Zadatak 2.32.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x+1}{x}}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)^x =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{-1}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{e^{-1}}{e} = e^{-2}.$$

Zadatak 2.33.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{-x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^{-1} = e^{-1}.$$

Zadatak 2.34.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^x\cdot\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^2\right] =$$

$$= (\textit{razlomak u 2. zagradi skratimo sa } x) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x+3}{x}}\right)^x\cdot\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}\right)^2\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{3}{x}\right)^x}\cdot 1 = \frac{e^{-1}}{e^3} = e^{-4}.$$

Zadatak 2.35.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{3x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\frac{4}{3}}{x}\right)^x = e^{\frac{4}{3}} = e\sqrt[3]{e}.$$

Zadatak 2.36.

$$\lim_{x\to\infty}\left[(x+1)(\ln(3x+1)-\ln(3x))\right] = \lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{3x+1}{3x}\right)^{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\ln\left[\left(\frac{3x+1}{3x}\right)^x\cdot\left(\frac{3x+1}{3x}\right)\right] =$$

$$= (\ln\ \textit{neprekidna funkcija}) =$$

$$= \ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x}\right)^x\cdot\left(\frac{3x+1}{3x}\right)\right] =$$

$$= \ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\frac{1}{3}}{x}\right)^x\cdot\left(1+\frac{1}{3x}\right)\right] =$$

$$= \ln e^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}.$$

Zadatak 2.37.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x+3}\right)^{-\frac{2}{3}x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x}\right)^{\frac{2}{3}x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\frac{3}{2}}{x}\right)^{\frac{2}{3}x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{\frac{3}{2}}{x}\right)^{x}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(e^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = e.$$

DZ 2.38. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-16}-\sqrt{x^2-4}\right)$

DZ 2.39. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$

DZ 2.40. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2+3x}{3x}\right)^{4x+2}$

DZ 2.41. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3(3x-1)^2(2x+5)^3}{(4x^4-x^3+5)^2}$

- Vrijedi:

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k \\ \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}} = e^k\end{array}}$$

Zadatak 2.42.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+x}{2}\right)^{\frac{3}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{1}{2}x\right)^{\frac{1}{x}}\right]^3 = \left(e^{\frac{1}{2}}\right)^3 = e^{\frac{3}{2}}.$$

Zadatak 2.43.

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1+x}{3}\right)^{\frac{1}{x-2}} = 1^\infty = \lim_{x\to 2}\left(\frac{3+(x-2)}{3}\right)^{\frac{1}{x-2}} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\left(1+\frac{1}{3}(x-2)\right)^{\frac{1}{x-2}} = e^{\frac{1}{3}}.$$

Zadatak 2.44. *Pokažite da vrijedi:*

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$$

Rješenje.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim_{x\to 0}\ln\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \ln\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = \ln e^1 = 1.$$

□

2.4 Neprekidnost funkcije

Najlakše si je neprekidnu realnu funkciju jedne realne varijable predočiti kao funkciju čiji graf *”nema skokova”*.

Teorem: Funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je neprekinuta u točki $a \in D$ ako i samo ako vrijedi:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Napomena: Elementarne funkcije navedene u odjeljku 2.1. su neprekidne u svakoj točki domene na kojoj su definirane!

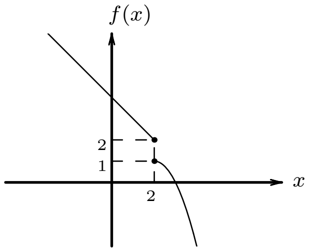
Primjer 2.45. *Ispitajte da li je sljedeća funkcija neprekidna:*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \begin{cases} -x + 4, & x < 2; \\ -x^2 + 4x - 3, & x \geq 2. \end{cases}$$

Rješenje.
Na intervalima $\langle -\infty, 2\rangle$ i $[2, +\infty\rangle$ funkcija f je elementarna (polinom!), dakle, na njima je neprekidna. Jedino pitanje je da li se ti polinomi ”dobro slijepe” u točki $x = 2$ ili u njoj vrijednost funkcije ima skok.
Vrijednost funkcije f u točki 2 ima skok ako je $-x + 4 \neq -x^2 + 4x - 3$ za $x = 2$. Tada kažemo da f ima prekid u točki 2. Inače je f neprekidna.

Dakle, provjeravamo:

$$f(2) = -4 + 4 \cdot 2 - 3 = 1 \neq -2 + 4 = 2$$
$$\Longrightarrow f \text{ ima prekid u točki } x = 2.$$



Slika 2.11: Graf funkcije f ima skok u $x = 2$.

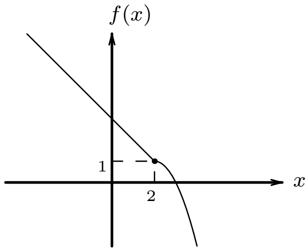
□

Primjer 2.46. *Ispitajte da li je sljedeća funkcija neprekidna:*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \begin{cases} -x + 3, & x < 2; \\ -x^2 + 4x - 3, & x \geq 2. \end{cases}$$

Rješenje.
Analogno kao u primjeru prije, provjeravamo:

$$f(2) = -4 + 8 - 3 = 1 = -\,2 + 3 = 1$$
$$\Longrightarrow f \text{ neprekidna!}$$



Slika 2.12: Graf funkcije f se u $x = 2$ "dobro slijepi".

□

Primjer 2.47. *Funkcija je zadana formulom:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-2x^2+3x-6}{x^4-2x^3+x^2-2x}, & x \neq 2; \\ A, & x = 2. \end{cases}$$

Kako treba odabrati $A = f(2)$ da bi funkcija f bila neprekidna na čitavoj domeni na kojoj je definirana?

Rješenje.
Neka je g racionalna funkcija iz definicije funkcije f:

$$g(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}{x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x} = \frac{(x^2+3)(\cancel{x-2})}{(\cancel{x-2})\,x(x^2+1)} = \frac{x^2+3}{x(x^2+1)}$$
$$\Rightarrow D_g = \mathbb{R}\backslash\{0,\ 2\}$$
$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\} \text{ (jer f(2) = A)}$$

Znamo da je f neprekidna u svim točkama domene D_f osim eventualno u točki 2, jer se za $x \neq 2$ f podudara sa elementarnom, racionalnom funkcijom koja je neprekidna.
Po teoremu, da bi f bila neprekinuta i u točki $x = 2$, mora biti

$$A = f(2) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2+3}{x^3+x} = \frac{7}{10}.$$

□

2.5 Asimptote funkcije

Asimptote funkcije su pravci kojima se funkcija sve više približava, ali ih nikada ne dostiže.
Razlikujemo *okomite, kose* i *vodoravne* asimptote.

- okomita asimptota

  → pravac $x = a$ takav da vrijedi:

  $$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty.$$

- kosa asimptota

  → pravac $y = kx + l$, takav da je:

  $$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \\ l &= \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx]. \end{aligned}$$

  (za $x \to -\infty$ lijeva, a za $x \to +\infty$ desna)

  Ako je $k = 0$, kosa asimptota je pravac $y = l$. Takvu asimptotu onda zovemo vodoravnom asimptotom.

Primjer 2.48. *Odredite asimptote funkcije:*

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}.$$

Rješenje.

- okomita asimptota

$$D = \mathbb{R}\backslash\{2\} = \langle -\infty, 2\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle$$

Sada računamo:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty$$

(tj. kako se ponaša funkcija kad se x približava broju 2 zdesna)

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty$$

(tj. kako se ponaša funkcija kad se x približava broju 2 slijeva)

$\Rightarrow$ pravac $x = 2$ je okomita asimptota!

- kosa asimptota

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{(x-2)^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x(x-2)^2} = 0,$$

$$l = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{(x-2)^2} - 0\right) = 0,$$

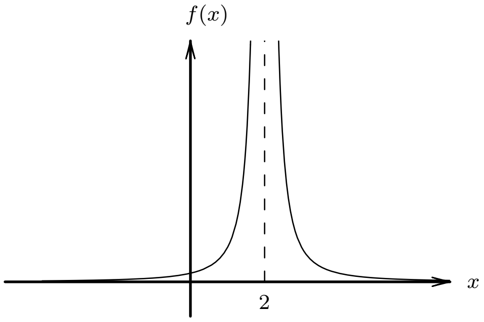
(desna kosa asimptota)

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{(x-2)^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x(x-2)^2} = 0,$$

$$l = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{(x-2)^2} - 0\right) = 0,$$

(lijeva kosa asimptota)

$\Rightarrow$ pravac $y = 0$ je i lijeva i desna vodoravna asimptota!



Slika 2.13: Graf funkcije $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$.

$\square$

Zadatak 2.49. *Odredite asimptote funkcije:*

$$f(x) = \frac{x^2}{x(x-1)}$$

Rješenje.

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$

- okomita asimptota

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}\,(x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x-1}=\frac{0}{-1}=0\qquad\neq\pm\infty$$

$\Rightarrow$ pravac $x=0$ nije okomita asimptota!

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}\,(x-1)}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}\,(x-1)}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$\Rightarrow$ pravac $x=1$ je okomita asimptota!

- kosa asimptota

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(x-1)}=\frac{1}{+\infty}=0$$

$$l=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}\,(x-1)}=\left(\frac{/:x}{/:x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=1$$

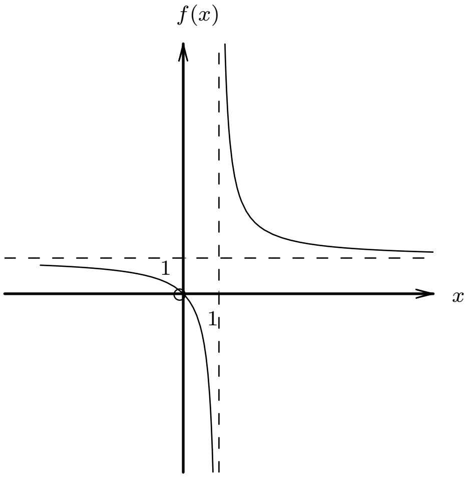
$\Rightarrow$ pravac $y=1$ je desna vodoravna asimptota!

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}\,(x-1)}=\frac{1}{-\infty}=0$$

$$l=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}\,(x-1)}=\left(\frac{/:x}{/:x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=1$$

$\Rightarrow$ pravac $y=1$ je lijeva vodoravna asimptota!

$\Rightarrow$ pravac $y=1$ je i lijeva i desna vodoravna asimptota!
(kose nema)



Slika 2.14: Graf funkcije $f(x) = \frac{x^2}{x(x-1)}$.

□

Zadatak 2.50. *Odredite asimptote funkcije:*

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}.$$

Rješenje.

$D_f = \mathbb{R} \backslash \{-1, 1\}$

- okomita asimptota

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$
$$\Rightarrow \text{ pravac } x = 1 \text{ je okomita asimptota!}$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$
$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$
$$\Rightarrow \text{ pravac } x = -1 \text{ je okomita asimptota!}$$

- kosa asimptota

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1$$

$$l = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^3}{x^2-1} - x\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0$$

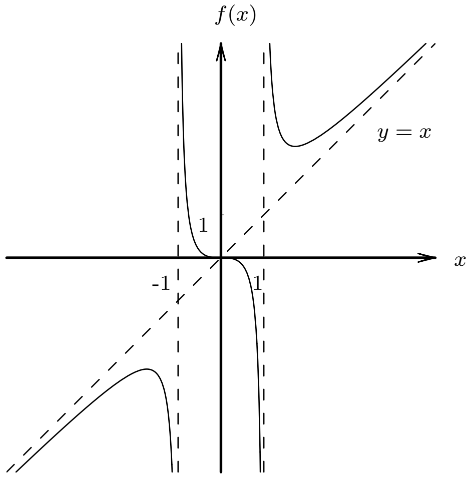
$\Rightarrow$ pravac $y = x$ je desna vodoravna asimptota!

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1$$

$$l = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0$$

$\Rightarrow$ pravac $y = x$ je lijeva vodoravna asimptota!

$\Rightarrow$ pravac $y = x$ je i lijeva i desna kosa asimptota!



Slika 2.15: Graf funkcije $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$.

□

Zadatak 2.51. *Odredite asimptote funkcije:*

$$f(x) = e^{-x^2} + 2.$$

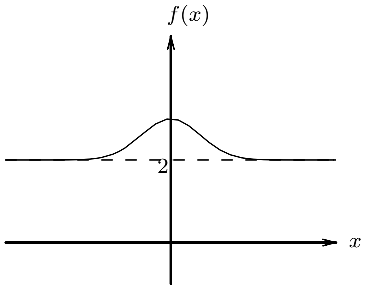
Rješenje.
$D_f = \mathbb{R} \quad \Rightarrow$ nema okomitih asimptota!

- kosa asimptota

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{-x^2} + 2}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{xe^{x^2}} + \frac{2}{x} \right) = 0$$

$$l = \lim_{x \to \pm\infty} (e^{-x^2} + 2) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{e^{x^2}} + 2 \right) = 2$$

$\Rightarrow$ pravac $y = 2$ je vodoravna asimptota!



Slika 2.16: Graf funkcije $f(x) = e^{-x^2} + 2$.

☐

DZ 2.52. *Naći asimptote funkcije:* $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

DZ 2.53. *Naći asimptote funkcije:* $f(x) = \frac{1}{1-e^x}$.

2.6 Pojam derivacije i tehnika deriviranja

Derivaciju funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ u točki x (oznaka: $f'(x)$) definiramo kao:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{(\underline{ako} taj limes \underline{postoji}!)}$$

Ona mjeri *promjenu vrijednosti funkcije uslijed infinitezimalno male promjene nezavisne varijable x.*

Zadatak 2.54. *Derivirajte po definiciji:*

a) $f(x) = x^2$,

b) $f(x) = \sqrt{x}$,

c) $f(x) = \frac{1}{x}$.

Rješenje.

a)

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2-\cancel{x^2}}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\,(2x+h)}{\cancel{h}} = 2x.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x}+\cancel{h}-\cancel{x}}{\cancel{h}\,(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

c) DZ

□

Mi nećemo derivirati po definiciji, već koristeći tablicu derivacija elementarnih funkcija i pravila deriviranja.

TABLICA DERIVACIJA ELEMENTARNIH FUNKCIJA

$c' = 0$

$x' = 1$

$(x^n)' = nx^{n-1}$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(e^x)' = e^x$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\mathrm{arcctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

PRAVILA DERIVIRANJA

1. $(c \cdot f)' = c \cdot f', \quad c = const. \in \mathbb{R},\ c \neq 0,$
2. $(f \pm g)' = f' \pm g'$ (derivacija sume),
3. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ (derivacija produkta),
4. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ (derivacija kvocijenta).

Zadatak 2.55. *Naći derivaciju funkcije:* $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} f'(x) =& \frac{(1+\sqrt{x})'(1-\sqrt{x}) - (1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})'}{(1-\sqrt{x})^2} = \\ =& \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x}) - (1+\sqrt{x})\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(1-\sqrt{x})^2} = \\ =& \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (1-\cancel{\sqrt{x}}+1+\cancel{\sqrt{x}})}{(1-\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{2}{2\sqrt{x}}}{(1-\sqrt{x})^2} = \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}. \end{aligned}$$

□

Zadatak 2.56. *Naći derivaciju funkcije:* $f(x) = 3x \cdot 3^x$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} f'(x) =& (3x)' \cdot 3^x + (3x) \cdot (3^x)' = 3 \cdot 3^x + 3x \cdot 3^x \ln 3 = \\ =& 3^{x+1} + 3^{x+1} \cdot x \ln 3 = 3^{x+1} \cdot (1 + x \ln 3) \end{aligned}$$

□

Zadatak 2.57. *Naći derivaciju funkcije:* $f(x) = \frac{3^x}{2^x}$.

Rješenje.

$$f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x \quad \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x \ln \frac{3}{2}.$$

□

Zadatak 2.58. *Naći derivaciju funkcije:* $f(x) = 3^x \cdot 5^{-x-1}$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} f(x) = 3^x \cdot 5^{-x} \cdot 5^{-1} =& \frac{1}{5} \cdot \frac{3^x}{5^x} = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x \\ & \Rightarrow\ f'(x) = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x \cdot \ln \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

$\square$

Zadatak 2.59. *Naći derivaciju funkcije:* $f(x) = x^3 + x + 215$.

Rješenje.

$$f'(x) = 3x^2 + 1 + 0 = 3x^2 + 1.$$

$\square$

Zadatak 2.60. *Naći derivaciju funkcije:* $f(x) = 4x^5 + 3x^2 + \frac{1}{3}$.

Rješenje.

$$f'(x) = 4 \cdot 5x^4 + 3 \cdot 2x + 0 = 20x^4 + 6x.$$

$\square$

Zadatak 2.61. *Naći derivaciju funkcije:* $f(x) = (x+1)(3x^2+2)$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} f'(x) =& (x+1)'(3x^2+2) + (x+1)(3x^2+2)' = (3x+2)^2 + (x+1)(6x) = \\ =& 3x^2 + 2 + 6x^2 + 6x = 9x^2 + 6x + 2. \end{aligned}$$

$\square$

Zadatak 2.62. *Naći derivaciju funkcije:* $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} f'(x) =& \frac{(x^2)'(x+1) - x^2(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \\ =& \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

$\square$

Zadatak 2.63. *Naći derivaciju funkcije:* $f(x) = \frac{3x^2+1}{2}$.

Rješenje.

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2} \cdot 2x + 0 = 3x.$$

□

Zadatak 2.64. *Naći derivaciju funkcije:* $f(x) = 4x^3 - \frac{100}{x^2} + \frac{4}{5\sqrt[3]{x}} - \frac{6}{7x\sqrt[4]{x}}$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^3 - 100x^{-2} + \frac{4}{5}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{6}{7}x^{-\frac{5}{4}}, \\ f'(x) &= 4 \cdot 3x^2 - 100 \cdot (-2) \cdot x^{-3} + \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot x^{-\frac{4}{3}} - \frac{6}{7} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) \cdot x^{-\frac{9}{4}} = \\ &= 12x^2 + \frac{200}{x^3} - \frac{4}{15\sqrt[3]{x^4}} + \frac{15}{14\sqrt[4]{x^9}}. \end{aligned}$$

□

2.7 Derivacija složene funkcije (kompozicije funkcija)

Za $f,\ u,\ v$ – realne funkcije jedne realne varijable, vrijedi:

$$\boxed{f(x) = v[u(x)] \quad \Rightarrow \; f'(x) = v'[u(x)] \cdot u'(x).}$$

Zadatak 2.65. *Deriviraj funkciju:* $f(x) = (2x + 1)^{10}$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} u(x) = 2x + 1,\ v(x) = x^{10}, \quad f(x) &= v[u(x)] \\ \Rightarrow f'(x) &= v'(u(x)) \cdot u'(x) \\ &= v'(2x + 1) \cdot (2x + 1)' \\ &= 10(2x + 1)^9 \cdot 2 \\ &= 20(2x + 1)^9. \end{aligned}$$

□

Zadatak 2.66. *Deriviraj funkciju:* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-3x^4}}$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-3x^4)^{-\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow f'(x) &= -\frac{1}{2}(1-3x^4)^{-\frac{3}{2}} \cdot (1-3x^4)' = \\ &= -\frac{1}{2}(1-3x^4)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-12x^3) \\ &= \frac{6x^3}{\sqrt{(1-3x^4)^3}}. \end{aligned}$$

$\square$

Zadatak 2.67. *Deriviraj funkciju:* $f(x) = \frac{1+2x}{(1-2x)^2}$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(1-2x)^2 - (1+2x)\cdot((1-2x)^2)'}{(1-2x)^4} = \\ &= \frac{2(1-2x)^2 - (1+2x)\cdot 2\cdot(1-2x)\cdot(-2)}{(1-2x)^4} = \\ &= \frac{2\cdot(1-\cancel{2}x)\cdot[1-2x+2(1+2x)]}{(1-2x)^{\cancel{4}3}} = \\ &= \frac{2\cdot(3+2x)}{(1-2x)^3}. \end{aligned}$$

$\square$

Zadatak 2.68. *Deriviraj funkciju:* $f(x) = (3^x)^2$.

Rješenje.

$$f'(x) = 2\cdot 3^x \cdot 3^x \ln 3 = 2\cdot 3^{2x}\ln 3.$$

$\square$

Zadatak 2.69. *Deriviraj funkciju:* $f(x) = 3^{x^2}$.

Rješenje.

$$f'(x) = 3^{x^2}\ln 3\cdot 2x = 2x\cdot 3^{x^2}\ln 3.$$

$\square$

Zadatak 2.70. *Deriviraj funkciju:* $f(x) = 4^{\sqrt{1-x^3}}$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4^{\sqrt{1-x^3}} \ln 4 \cdot (\sqrt{1-x^3})' = \\ &= 4^{\sqrt{1-x^3}} \ln 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^3}} \cdot (-3x^2). \end{aligned}$$

☐

Zadatak 2.71. *Deriviraj funkciju:* $f(x) = \ln \frac{x}{1-x}$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\frac{x}{1-x}} \cdot \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1-x}{x} \cdot \frac{1 \cdot (1 \cancel{-} x) \; - x \cdot (-1)}{(1-x)^{\bcancel{2}}} = \\ &= \frac{1-x+x}{x(1-x)} = \frac{1}{x(1-x)}. \end{aligned}$$

☐

Zadatak 2.72. *Deriviraj funkciju:* $f(x) = \ln \ln x$.

Rješenje.

$$f'(x) = \frac{1}{\ln x} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln x}.$$

☐

Zadatak 2.73. *Deriviraj funkciju:* $f(x) = x^2 \sin x$.

Rješenje.

$$f'(x) = (x^2)' \cdot \sin x + x^2 \cdot (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$

☐

Zadatak 2.74. *Deriviraj funkciju:* $f(x) = \sin x \cdot \cos x$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin x)' \cdot \cos x + \sin x \cdot (\cos x)' = \\ &= \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x) = \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x). \end{aligned}$$

☐

Zadatak 2.75. *Deriviraj funkciju:* $f(x) = \sin x \cdot \cos 5$.

Rješenje.

$$f'(x) = \cos 5 (\sin x)' = (\cos 5) \cdot \cos x.$$

□

Zadatak 2.76. *Deriviraj funkciju:* $f(x) = 3\sqrt{x} \ln x + \ln 2$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3\sqrt{x})' \cdot \ln x + (3\sqrt{x}) \cdot (\ln x)' + 0 = \\ &= 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + 3\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} = \\ &= \frac{3}{2\sqrt{x}} \ln x + \frac{3}{\sqrt{x}} = \frac{3}{\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{1}{2} \ln x + 1 \right). \end{aligned}$$

□

Zadatak 2.77. *Deriviraj funkciju:* $f(x) = x \sin x \ln x$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} f'(x) &= [x \sin x]' \cdot \ln x + x \sin x \cdot (\ln x)' = \\ &= [x' \cdot \sin x + x \cdot (\sin x)'] \cdot \ln x + \cancel{x} \cdot \sin x \cdot \frac{1}{\cancel{x}} = \\ &= (\sin x + x \cos x) \ln x + \sin x. \end{aligned}$$

□

Zadatak 2.78. *Deriviraj funkciju:* $f(x) = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2e^{\sqrt{x}})' \cdot (\sqrt{x} - 1) + 2e^{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x} - 1)' = \\ &= \cancel{2} \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x} - 1) + \cancel{2}e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}} = \\ &= \frac{e^{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}} \cdot (\cancel{\sqrt{x}} - \cancel{1} + \cancel{1}) = e^{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

□

Zadatak 2.79. *Dana je funkcija:*

$$f(x) = \frac{1 - \log x}{1 + \log x}.$$

Izračunaj $f'(10)$.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(1-\log x)' \cdot (1+\log x) - (1-\log x)\cdot(1+\log x)'}{(1+\log x)^2} = \\
&= \frac{-\frac{1}{x\ln 10}\cdot(1+\log x) - (1-\log x)\cdot\frac{1}{x\ln 10}}{(1+\log x)^2} = \\
&= \frac{-\frac{1}{x\ln 10}\cdot(1+\cancel{\log x} + 1 - \cancel{\log x})}{(1+\log x)^2} = \\
&= \frac{-\frac{2}{x\ln 10}}{(1+\log x)^2} = -\frac{2}{x\ln 10\cdot(1+\log x)^2}.
\end{aligned}$$

Sada uvrstimo $x = 10$:

$$\begin{aligned}
f'(10) &= -\frac{2}{10\ln 10\cdot(1+\underbrace{\log 10}_{1})^2} = \\
&= -\frac{2}{10\ln 10\cdot 2^2} = \\
&= -\frac{2}{40\ln 10} = -\frac{1}{20\ln 10}.
\end{aligned}$$

□

Zadatak 2.80. *Dana je funkcija:*

$$f(x) = x^2 e^{x\sqrt{x}}.$$

Izračunaj $f'(1)$.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2 e^{x^{\frac{3}{2}}} \\
\Rightarrow f'(x) &= 2x\cdot e^{x^{\frac{3}{2}}} + x^2\cdot e^{x^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \\
&= 2xe^{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{2}x^2\sqrt{x}e^{x^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

Sada uvrstimo $x = 1$:

$$f'(1) = 2e + \frac{3}{2}e = \frac{7}{2}e.$$

□

2.8 Derivacija implicitno zadane funkcije

Primjer 2.81. *Neka je funkcija $y = y(x)$ dana implicitno jednadžbom:*

$$x^2y + y^2 = e^x.$$

Odredite $y'(x)$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} x^2y(x) + (y(x))^2 &= e^x \quad /()' \\ (x^2)' \cdot y(x) + x^2 \cdot y'(x) + [(y(x))^2]' &= (e^x)' \\ 2x \cdot y(x) + x^2 \cdot y'(x) + 2y(x) \cdot y'(x) &= e^x \\ y'(x) \cdot (x^2 + 2y(x)) &= e^x - 2x \cdot y(x) \\ \Rightarrow \quad y'(x) &= \frac{e^x - 2x \cdot y(x)}{x^2 + 2y(x)}. \end{aligned}$$

□

2.9 Logaritamsko deriviranje

Primjer 2.82. *Derivirajte funkciju: $f(x) = x^{x+1}$.*

Rješenje. Primijetimo, i baza i eksponent su ovdje funkcije od x, pa ovakvu funkciju ne znamo derivirati koristeći tablicu derivacija elementarnih funkcija!
U takvim slučajevima služimo se sljedećim "trikom":

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{x+1} \quad / \ln \\ \ln f(x) &= (x+1)\ln x \quad /()' \\ \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) &= 1 \cdot \ln x + (x+1) \cdot \frac{1}{x} \\ \Rightarrow f'(x) &= f(x) \cdot \left(\ln x + \frac{x+1}{x}\right) \\ \Rightarrow f'(x) &= x^{x+1} \cdot \left(\ln x + \frac{x+1}{x}\right). \end{aligned}$$

□

2.10 Derivacije višeg reda

Primjer 2.83. *Dana je funkcija* $y = y(x) = e^x$. *Odredite njezinu* n*-tu derivaciju,* $y^{(n)} = y^{(n)}(x)$.

Rješenje.
Redom računamo prvu derivaciju (y'), drugu derivaciju (y'') itd., dok ne uočimo neku pravilnost:

$$\begin{aligned} y' &= y'(x) = e^x, \\ y'' &= y''(x) = (e^x)' = e^x, \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= e^x. \end{aligned}$$

□

Zadatak 2.84. *Dana je funkcija* $y = e^{-2x}$. *Odredite njezinu* n*-tu derivaciju.*

Rješenje.

$$\begin{aligned} y' &= e^{-2x} \cdot (-2), \\ y'' &= (e^{-2x} \cdot (-2))' = (-2) \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = (-2)^2 e^{-2x}, \\ y''' &= (-2)^2 e^{-2x} \cdot (-2) = (-2)^3 e^{-2x}, \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= (-2)^n e^{-2x}. \end{aligned}$$

□

Zadatak 2.85. *Dana je funkcija* $y = \frac{1}{x}$. *Odredite njezinu* n*-tu derivaciju.*

Rješenje.

$$\begin{aligned} y &= x^{-1} \\ y' &= (-1) \cdot x^{-2}, \\ y'' &= (-1) \cdot (-2) \cdot x^{-3}, \\ y''' &= (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot x^{-4}, \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-(n+1)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}. \end{aligned}$$

□

DZ 2.86. *Pokažite da funkcija* $y = y(x) = e^{-x}\cos x$ *zadovoljava diferencijalnu jednadžbu*

$$y^{(iv)} + 4y = 0.$$

Rješenje. Odredimo $y^{(iv)} = -4e^{-x}\cos x$.

Derivacija višeg reda implicitno zadane funkcije

Zadatak 2.87. *Neka je funkcija* $y = y(x)$ *implicitno zadana jednadžbom:*

$$\ln\sqrt{x} + y^2 - 3y = \sqrt{2}.$$

Odredite njezinu drugu derivaciju, y''.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\ln\sqrt{x} + y^2 - 3y &= \sqrt{2} \quad \backslash()' \\
\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2y \cdot y' - 3y' &= 0 \quad \Rightarrow \ (\star)\ y' = -\frac{1}{2y-3} \cdot \frac{1}{2x} \\
\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + 2y \cdot y' - 3y' &= 0 \quad \backslash()' \\
-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + 2y' \cdot y' + 2y \cdot \underline{y''} - 3\underline{y''} &= 0 \\
y'' \cdot (2y-3) &= \frac{1}{2x^2} - 2(y')^2 \\
y'' &= \frac{1}{2y-3} \cdot \left[\frac{1}{2x^2} - 2(y')^2\right] \\
&= (\star) = \frac{1}{2y-3}\left[\left(1 - \frac{1}{(2y-3)^2}\right) \cdot \frac{1}{2x^2}\right].
\end{aligned}$$

□

2.11 Taylorova formula

Ako funkcija f ima n-tu derivaciju na nekoj okolini x_0, **Taylorov polinom funkcije f u točki $x_0 \in \mathbb{R}$ stupnja n** je polinom oblika:

$$T_f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Taylorov polinom funkcije f u x_0 služi za *aproksimaciju funkcije f na okolini* x_0, tj.

$$f(x) \approx T_f(x) \text{ na nekoj okolini } x_0.$$

Što je taj polinom višeg stupnja, obično bolje aproksimira funkciju f.

Primjer 2.88. *Funkciju $f(x) = \ln x$ razvijte po cijelim nenegativnim potencijama binoma $(x-1)$ do člana sa x^3.*

Rješenje.
Traži se zapravo Taylorov polinom funkcije f stupnja 3 oko točke 1:

$$f(x) \approx f(1) + \frac{x-1}{1!}f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2!}f''(1) + \frac{(x-1)^3}{3!}f'''(1).$$

Računamo:

$$\begin{aligned}
& & f(1) &= \ln 1 = 0, \\
f'(x) &= \frac{1}{x} & \Rightarrow\ f'(1) &= \frac{1}{1} = 1, \\
f''(x) &= -\frac{1}{x^2} & \Rightarrow\ f''(1) &= -\frac{1}{1} = -1, \\
f'''(x) &= 2 \cdot \frac{1}{x^3} & \Rightarrow\ f'''(1) &= 2.
\end{aligned}$$

Sada je:

$$\begin{aligned}
f(x) &\approx 0 + \frac{x-1}{1} \cdot 1 + \frac{(x-1)^2}{2 \cdot 1} \cdot (-1) + \frac{(x-1)^3}{3 \cdot \cancel{2} \cdot 1} \cdot \cancel{2} \\
&\approx (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}.
\end{aligned}$$

□

2.12 Diferencijal funkcije

Neka je dana funkcija $y = y(x)$.

- *prirast* zavisne varijable
  (=promjena zavisne varijable $y = y(x)$ pri promjeni nezavisne za Δx):

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$$

- *infinitezimalno mali prirast* zavisne varijable – tzv. **diferencijal** (=promjena zavisne varijable $y = y(x)$ pri infinitezimalno maloj promjeni nezavisne varijable x - oznaka dx):

$$\underline{dy} = y(x+dx) - y(x) = (\text{po formuli za derivaciju}) = \underline{y'(x)dx}$$

Zadatak 2.89. *Koliko se približno promijene ukupni troškovi $T(Q)$ ako se proizvodnja na nivou $Q = 10$ promijeni za $dQ = 0.034$?*
($T(Q) = 3Q^3 - 2Q + 1$)

Rješenje.

$$\Delta T \approx dT = T'(Q)dQ = (9Q^2 - 2)dQ$$

Nama je $Q = 10,\ dQ = 0.034$:

$$\Delta T(10) \approx T'(10)dQ = (9 \cdot 10^2 - 2) \cdot 0.034 = 30.532.$$

Ukupni troškovi se promijene za približno 30.532. □

2.13 Jednadžba tangente i normale

- jednadžba **tangente** na graf funkcije $f(x)$ u točki $T(x_0, f(x_0))$

$$t\ \dots\ y = y(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{k_t} \cdot (x - x_0),$$

- jednadžba **normale** na graf funkcije $f(x)$ u točki $A(x_0, f(x_0))$

$$n\ \dots\ y = y(x) = f(x_0) \underbrace{-\frac{1}{f'(x_0)}}_{k_n} \cdot (x - x_0).$$

Primjer 2.90. *Odredite jednadžbu tangente i normale na graf funkcije*

$$f(x) = \frac{8}{4 + x^2}$$

u točki s apscisom 2.

Rješenje.

$x_0 = 2,\ y_0 = f(x_0) = 1 \quad \Rightarrow T(2, f(2)) = T(2,1)$

$f'(x) = [8 \cdot (4+x^2)^{-1}]' = -8 \cdot (4+x^2)^{-2} \cdot 2x = \frac{-16x}{(4+x^2)^2}$
$f'(x_0) = f'(2) = \frac{-32}{64} = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} t \ \ldots \ y - 1 &= -\frac{1}{2}(x-2), \\ y &= -\frac{1}{2}x + 1 + 1, \\ y &= -\frac{1}{2}x + 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n \ \ldots \ y - 1 &= -\frac{1}{-\frac{1}{2}}(x-2), \\ y &= 2(x-2) + 1, \\ y &= 2x - 3. \end{aligned}$$

□

Zadatak 2.91. *Odredite jednadžbe tangente i normale na krivulju*

$$y = e^{1-x^2} - 1$$

u njezinim sjecištima s x-osi.

Rješenje.

$T(x_0, y_0) = ?$

$$\begin{aligned} y_0 = 0 \ \Rightarrow \ 0 = e^{1-x_0^2} - 1 \ \Rightarrow e^{1-x_0^2} = 1 \ \Rightarrow 1 - x_0^2 &= 0 \\ x_0^2 &= 1 \\ x_0 &= \pm 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \ T_1(1,0), \quad T_2(-1,0)$

$y'(x) = e^{1-x^2} \cdot (-2x)$
$\Rightarrow \ y'(1) = -2,\ y'(-1) = 2.$

$$\begin{aligned} T_1 \ \Rightarrow \quad t \ \ldots \ y - 0 &= -2(x-1), \\ y &= -2x + 2 \\ n \ \ldots \ y - 0 &= -\frac{1}{-2}(x-1), \\ y &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\ T_2 \ \Rightarrow \quad t \ \ldots \ y - 0 &= 2(x+1), \\ y &= 2x + 2 \\ n \ \ldots \ y - 0 &= -\frac{1}{2}(x+1), \\ y &= -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

Zadatak 2.92. *Na krivulji* $y = x^2 - 1$ *nađite točku u kojoj je normala paralelna pravcu* $p \ \ldots \ y = x + 1$.

Rješenje.

$T(x_0, y_0) = \,?$

$$\begin{aligned} T \in \Gamma_y \ &\Rightarrow \ \underline{y_0 = x_0^2 - 1} \\ n \parallel p \ &\Rightarrow \ k_n = k_p = 1 \\ &\Rightarrow \ k_n = -\frac{1}{y'(x_0)} = 1 \quad \Rightarrow \underline{y'(x_0) = -1} \end{aligned}$$

$$y'(x) = 2x \ \Rightarrow y'(x_0) = 2x_0 = -1 \ \Rightarrow \ x_0 = -\frac{1}{2},$$

$$y_0 = x_0^2 - 1 = (-\frac{1}{2})^2 - 1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}.$$

$$\Rightarrow \quad T(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$$

□

2.14 L' Hospitalovo pravilo

L' Hospitalovo pravilo se koristi za jednostavno računanje limesa razlomljenih funkcija kada dobijemo neodređeni izraz $\frac{0}{0}$ ili $\pm\frac{\infty}{\infty}$.
Vrijedi:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}\left(\text{ ili }\pm\frac{\infty}{\infty}\right)\quad\Longrightarrow\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

L' HOSPITALOVO PRAVILO

Zadatak 2.93.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2}=\frac{0}{0}=\textit{(L'H)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-2x+1)'}{(x^2-3x+2)'}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{2x-3}=\frac{0}{-1}=0.$$

Zadatak 2.94.

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=\infty\cdot 0=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\frac{0}{0}=(L'H)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\cancel{\frac{1}{x^2}}\right)}{-\cancel{\frac{1}{x^2}}}=e^{\frac{1}{\infty}}=e^0=1.$$

Zadatak 2.95.

$$\lim_{x\to 0}(x\ln x)=0\cdot(-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\frac{-\infty}{\infty}=\textit{(L'H)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cancel{x}}}{-\frac{1}{x^{\cancel{2}}}}=\lim_{x\to 0}(-x)=0.$$

Zadatak 2.96.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\frac{0}{0}=\textit{(L'H)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\frac{0}{0}=\textit{(L'H)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}==\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}\cdot(2+x)}=\frac{1}{2}.$$

Zadatak 2.97.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+3}-2}=\frac{0}{0}=\textit{(L'H)}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}}{\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x+3}}}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}}=2.$$

Zadatak 2.98.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x-1}}=\frac{\infty}{\infty}=\text{(L'H)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3(x-1)^{\frac{2}{3}}}{x}=\frac{\infty}{\infty}=\text{(L'H)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{3}\cdot\frac{2}{\cancel{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt[3]{x-1}}=\frac{2}{\infty}=0.$$

2.15 Ekstremi funkcija jedne varijable

Postupak za određivanje ekstrema funkcije $f(x)$ je sljedeći:

1. Nađemo stacionarne točke (stacionarne točke su nultočke od $f'(x)$). Neka su to točke $x_1, x_2, \ldots$
2. Svaku od stacionarnih točaka uvrstimo u drugu derivaciju funkcije f ($f''(x)$). Ako je $f''(x_i) > 0$ tada je točka x_i TOČKA LOKALNOG MINIMUMA funkcije f. Ako je $f''(x_i) < 0$ tada je točka x_i TOČKA LOKALNOG MAKSIMUMA funkcije f.

Napomena: Ako je $f''(x_i) = 0$, tražimo prvu sljedeću derivaciju višeg reda koja je različita od nule u $x = x_i$. Ako je ta derivacija parna (dakle 4., 6., 8., itd.), tada je točka x_i LOKALNI EKSTREM. Ako je ta derivacija neparna (dakle 3., 5., 7., itd.), tada funkcija u $x = x_i$ ima INFLEKSIJU.

Zadatak 2.99. *Nađite ekstremne vrijednosti funkcija*

a) $f(x) = e^x - x$

b) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

c) $f(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4.$

Rješenje.

a)

$$f'(x) = e^x - 1 = 0$$

$$e^x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \text{je jedina stacionarna točka}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^x \\ f''(0) &= e^0 = 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \text{je točka lokalnog minimuma} \\ f(0) &= e^0 - 0 = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{rješenje: } m(0, 1)$$

b)

$$f'(x) = \frac{1 + x^2 - x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} = 0$$

$$\Rightarrow 1 - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 \quad \text{i} \quad x_2 = -1 \quad \text{su stacionarne točke}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2x \cdot (1 + x^2)^2 - (1 - x^2) \cdot 2 \cdot (1 + x^2) \cdot 2x}{(1 + x^2)^4} \\ &= \frac{(1 \cancel{+} x^2) \cdot [-2x \cdot (1 + x^2) - 4x \cdot (1 - x^2)]}{(1 + x^2)^{\cancel{4}3}} \\ &= \frac{-2x - 2x^3 - 4x + 4x^3}{(1 + x^2)^3} \\ &= \frac{2x^3 - 6x}{(1 + x^2)^3} \end{aligned}$$

$f''(1) = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow \text{max}, \quad f(1) = \frac{1}{2}$

$f''(-1) = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \text{min}, \quad f(-1) = -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \text{rješenje: } m(-1, -\frac{1}{2}), \quad M(1, \frac{1}{2}).$$

c)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{6}x^6 - \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 \\ f'(x) &= x^5 - 2x^4 + x^3 = 0 \\ x^3(x^2 - 2x + 1) &= 0 \\ x^3(x - 1)^2 &= 0 \\ \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad x_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&f''(x) = 5x^4 - 8x^3 + 3x^2\\
&f''(0) = 0 \quad \to \quad \text{dalje provjera}\\
&f''(1) = 0 \quad \to \quad \text{dalje provjera}\\[4pt]
&f'''(x) = 20x^3 - 24x^2 + 6x\\
&f'''(0) = 0 \quad \to \quad \text{dalje provjera}\\
&f'''(1) = 2 \neq 0 \quad \text{neparna derivacija} \quad \Rightarrow \quad (1, \frac{1}{60}) \text{ infleksija}\\[4pt]
&f^{IV}(x) = 60x^2 - 48x + 6\\
&f^{IV}(0) = 6 > 0 \quad \text{parna derivacija} \quad \Rightarrow \quad m(0,0) \text{ minimum}
\end{aligned}
$$

□

Zadatak 2.100. *Rastavite broj 10 na dva pribrojnika tako da njihov umnožak bude najveći.*

Rješenje.

$$
\begin{aligned}
x, 10 - x \quad &\Rightarrow \quad 10 = x + (10 - x)\\
x(10 - x) \quad &\to \quad \max
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -x^2 + 10x\\
f'(x) &= -2x + 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 5\\
f''(x) &= -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad M(5, 25)
\end{aligned}
$$

$$10 = 5 + 5$$

□

Zadatak 2.101. *Za koju vrijednost parametara a i b funkcija $f(x) = a\ln(x) + bx^2 + x$ ima ekstreme u točkama s apscisama $x = 1$ i $x = 2$? Koji su to ekstremi?*

Rješenje.

$$f'(x) = a \cdot \frac{1}{x} + 2bx + 1 = 0$$

$$\begin{aligned} x=1 \quad &\Rightarrow \quad a+2b+1=0 \quad /_{II\cdot(-2)+I} \\ x=2 \quad &\Rightarrow \quad \frac{a}{2}+4b+1=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -6b-1&=0 \\ -6b&=1 \quad \Rightarrow \quad b=-\frac{1}{6} \\ & \qquad\qquad a=-\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x)&=-\frac{2}{3}\ln(x)-\frac{1}{6}x^2+x \\ f'(x)&=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{3}x+1 \\ f''(x)&=-\frac{2}{3}\cdot(-\frac{1}{x^2})-\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(1)&=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}>0 \quad \Rightarrow \quad m(1,\frac{5}{6}) \\ f''(2)&=\frac{2}{12}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}<0 \quad \Rightarrow \quad M(2,-\frac{2}{3}\ln(2)+\frac{4}{3}) \end{aligned}$$

□

2.16 Rast i pad funkcija jedne varijable

Teorem:
Neka je funkcija f neprekidna i derivabilna na intervalu $\langle a,b\rangle$.
Ako je $f'(x)>0$ za sve $x\in\langle a,b\rangle$, tada je f strogo rastuća na $\langle a,b\rangle$.
Ako je $f'(x)<0$ za sve $x\in\langle a,b\rangle$, tada je f strogo padajuća na $\langle a,b\rangle$.
Ako je $f'(x)=0$ za sve $x\in\langle a,b\rangle$, tada je f konstanta na $\langle a,b\rangle$.

Zadatak 2.102. *Odredite područje rasta i pada funkcije* $f(x)=x^3-3x$.

Rješenje.
Domena: $D_f=\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x)=&3x^2-3=0 \\ &3x^2=3 \quad \Rightarrow \quad x^2=1 \quad \Rightarrow \quad x_1=-1,\ x_2=1 \end{aligned}$$

	$\langle -\infty, -1 \rangle$	$\langle -1, 1 \rangle$	$\langle 1, +\infty \rangle$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Funkcija raste na $\langle -\infty, -1 \rangle$ i na $\langle 1, +\infty \rangle$
Funkcija pada na $\langle -1, 1 \rangle$ $\square$

Zadatak 2.103. *Odredite područje rasta i pada funkcije* $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$.

Rješenje.
Domena: $x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad D_f = \mathbb{R} \backslash \{0\}$

$$\begin{aligned} f'(x) =& 1 \cdot e^{\frac{1}{x}} + xe^{\frac{1}{x}} \cdot (-\frac{1}{x^2}) \\ &= e^{\frac{1}{x}} \cdot (1 - \frac{1}{x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \end{aligned}$$

	$\langle -\infty, 0 \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle$	$\langle 1, +\infty \rangle$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Funkcija raste na $\langle -\infty, 0 \rangle$ i na $\langle 1, +\infty \rangle$
Funkcija pada na $\langle 0, 1 \rangle$ $\square$

Zadatak 2.104. *Odredite područje rasta i pada funkcije* $f(x) = -\frac{1}{3} ln(x^2 - 1)^2$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} \text{Domena:} \quad (x^2 - 1)^2 &> 0 \\ x^2 - 1 &\neq 0 \\ x^2 &\neq 1 \quad \Rightarrow \quad x \neq \pm 1 \\ D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x^2 - 1)^{\cancel{2}}} \cdot 2 \cdot (x^2 \cancel{-} 1) \cdot 2x \\ &= \frac{-4x}{3(x^2 - 1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \end{aligned}$$

	$\langle -\infty, -1 \rangle$	$\langle -1, 0 \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle$	$\langle 1, +\infty \rangle$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$
	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Funkcija raste na $\langle -\infty, -1 \rangle$ i na $\langle 0, 1 \rangle$
Funkcija pada na $\langle -1, 0 \rangle$ i na $\langle 1, +\infty \rangle$ $\square$

Zadatak 2.105. *Odredite područje rasta i pada funkcije* $f(x) = \frac{2x^2-2x-1}{x}$.

Rješenje.
Domena: $x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$f(x) = 2x - 2 - \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 2 + \frac{1}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2x^2+1}{x^2} = 0$$

$$2x^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow\Leftarrow$$

$\Rightarrow$ nema stacionarnih točaka

	$\langle -\infty, 0\rangle$	$\langle 0, +\infty\rangle$
$f'(x)$	$+$	$+$
	$\nearrow$	$\nearrow$

Mogli smo i odmah zaključiti da je $f'(x) = \frac{2x^2+1}{x^2} > 0$, $\forall x \in D_f$.
$\Rightarrow$ Funkcija raste na cijeloj svojoj domeni, tj. na $\langle -\infty, 0\rangle$ i na $\langle 0, +\infty\rangle$. $\square$

2.17 Konveksnost, konkavnost, točka infleksije

Teorem:
Neka je funkcija f neprekidna i dva puta derivabilna na intervalu $\langle a, b\rangle$. Tada vrijedi:

- $f(x)$ je **konveksna** na $\langle a, b\rangle$ ako i samo ako je $f''(x) \geq 0$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle$.
- $f(x)$ je **konkavna** na $\langle a, b\rangle$ ako i samo ako je $f''(x) \leq 0$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle$.

Teorem:
Neka je f funkcija čija je druga derivacija neprekidna na intervalu $\langle a, b\rangle$ i neka je $c \in \langle a, b\rangle$.

- Ako je $f''(c) = 0$ i f'' mijenja predznak u c (tj. $f''(x) \geq 0$ za $a < x < c$ i $f''(x) \leq 0$ za $c < x < b$, ili $f''(x) \leq 0$ za $a < x < c$ i $f''(x) \geq 0$ za $c < x < b$), tada je c **točka infleksije** funkcije f.
- Ako je c točka infleksije funkcije f, tada je $f''(c) = 0$.

Zadatak 2.106. *Odredite područja konveksnosti, konkavnosti i točke infleksije funkcije* $f(x) = x^3 - 6x^2 + x + \frac{1}{2}$.

Rješenje.
Domena: $D_f = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) =& 3x^2 - 12x + 1 \\ f''(x) =& 6x - 12 = 0 \\ & 6x = 12 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \quad \text{je kandidat za točku infleksije} \end{aligned}$$

	$\langle -\infty, 2\rangle$	$\langle 2, +\infty\rangle$
$f''(x)$	$-$	$+$
	$\cap$	$\cup$

Funkcija je konkavna na $\langle -\infty, 2\rangle$.
Funkcija je konveksna na $\langle 2, +\infty\rangle$.
$\Rightarrow x = 2$ je točka infleksije. ☐

Zadatak 2.107. *Odredite područja konveksnosti, konkavnosti i točke infleksije funkcije* $f(x) = -x^2 - 6x + 5$.

Rješenje.
Domena: $D_f = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) =& -2x - 61 \\ f''(x) =& -2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{nema točaka infleksije} \end{aligned}$$

	$\langle -\infty, +\infty\rangle$
$f''(x)$	$-$
	$\cap$

Funkcija je konkavna $\forall x \in D_f$. ☐

Zadatak 2.108. *Odredite područja konveksnosti, konkavnosti i točke infleksije funkcije* $f(x) = \frac{x^2}{x^2-25}$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} Domena: x^2 - 25 &\neq 0 \\ x^2 &\neq 25 \\ x &\neq \pm 5 \quad \Rightarrow \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5, 5\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2x(x^2-25)-x^2\cdot 2x}{(x^2-25)^2}\\
&= \frac{2x^3-50x-2x^3}{(x^2-25)^2} = \frac{-50x}{(x^2-25)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{-50(x^2-25)^2+50x\cdot 2\cdot(x^2-25)\cdot 2x}{(x^2-25)^4}\\
&= \frac{50(x^2-25)\cdot[-(x^2-25)+4x^2]}{(x^2-25)^4}\\
&= \frac{50(3x^2+25)}{(x^2-25)^3} = 0 \quad \Rightarrow\Leftarrow
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \text{ nema točaka infleksije}$$

	$\langle -\infty, -5\rangle$	$\langle -5, 5\rangle$	$\langle 5, +\infty\rangle$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Funkcija je konkavna na $\langle -5, 5\rangle$.
Funkcija je konveksna na $\langle -\infty, -5\rangle$ i na $\langle +5, +\infty\rangle$. □

2.18 Grafički prikaz funkcije

Ispitujemo sljedeće elemente:

1. domenu
2. nul-točke
3. asimptote
4. stacionarne točke, rast, pad
5. ekstreme
6. točke infleksije, konveksnost, konkavnost

Zadatak 2.109. *Uz detaljne argumente grafički prikažite funkciju* $f(x) = x^3 - 3x$.

Rješenje.

1. domena: $D_f = \mathbb{R}$
2. nul-točke:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x^3 - 3x &= 0 \\ x(x^2-3) &= 0 \quad \Rightarrow \quad x_1^0 = 0, \quad x_{2,3}^0 = \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

3. asimptote: nema
4. stacionarne točke, rast, pad:

$$\begin{aligned} f'(x) = 3x^2 - 3 &= 0 \\ 3x^2 &= 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1, x_2 = 1 \end{aligned}$$

	$\langle -\infty, -1\rangle$	$\langle -1, 1\rangle$	$\langle 1, +\infty\rangle$
$3x^2-3$	$+$	$-$	$+$
	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

5. ekstremi:

$$\begin{aligned} &f''(x) = 6x \\ &f''(-1) = -6 < 0 \quad \Rightarrow \quad M(-1,2) \\ &f''(1) = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad m(1,-2) \end{aligned}$$

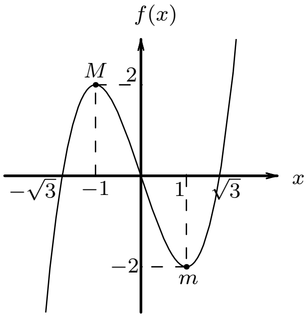
6. točke infleksije, konveksnost, konkavnost:

$$f''(x) = 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \text{je kandidat za točku infleksije}$$

	$\langle -\infty, 0\rangle$	$\langle 0, +\infty\rangle$
$f''(x)$	$-$	$+$
	$\bigcap$	$\bigcup$

Funkcija je konveksna na $\langle 0, +\infty\rangle$.
Funkcija je konkavna na $\langle -\infty, 0\rangle$.
$x = 0$ je točka infleksije.

$\square$



Slika 2.17: Graf funkcije $f(x) = x^3 - 3x$.

Zadatak 2.110. *Uz detaljne argumente grafički prikažite funkciju*

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}.$$

Rješenje.

1. domena: $x - 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 1 \quad \Rightarrow \quad D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}.$
2. nul-točke:
$$\begin{aligned} f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 &= 0 \\ x &= 0 \quad \Rightarrow \quad x_1^0 = 0 \end{aligned}$$
3. asimptote:
Okomita asimptota: pravac $x = 1$
$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ &\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ &\qquad\qquad \Rightarrow \text{ pravac } x = 1 \text{ je okomita asimptota!} \end{aligned}$$

   Desna kosa asimptota: pravac $y = kx + l$
$$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x-1} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} = 1, \\ l &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = 1, \\ &\Rightarrow \quad y = x + 1 \text{ je desna kosa asimptota} \end{aligned}$$

Lijeva kosa asimptota: pravac $y = kx + l$

$$\begin{aligned}
k &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x-1}\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x-1} = 1,\\
l &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2+x}{x-1} = 1,\\
&\Rightarrow \quad y = x+1 \text{ je lijeva kosa asimptota}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{ pravac } y = x+1 \text{ je i lijeva i desna kosa asimptota!}$$

4. stacionarne točke, rast, pad:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(x^2)'\cdot(x-1) - x^2(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}\\
f'(x) &= 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2-2x=0 \quad\Leftrightarrow\quad x(x-2)=0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = 2$$

	$\langle -\infty, 0\rangle$	$\langle 0, 1\rangle$	$\langle 1, 2\rangle$	$\langle 2, +\infty\rangle$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

5. ekstremi:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(x^2-2x)'\cdot((x-1)^2) - (x^2-2x)\cdot((x-1)^2)'}{((x-1)^2)^2}\\
&= \frac{(2x-2)\cdot(x-1)^2 - (x^2-2x)2(x-1)}{(x-1)^4}\\
&= \frac{(x-1)[(2x-2)(x-1) - 2(x^2-2x)]}{(x-1)^4}\\
&= \frac{2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}
\end{aligned}$$

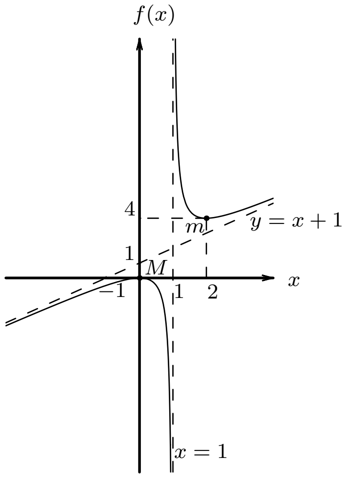
$$\begin{aligned}
f''(0) &= -2 < 0 \quad\Rightarrow\quad M(0,0)\\
f''(2) &= 2 > 0 \quad\Rightarrow\quad m(2,4)
\end{aligned}$$

6. točke infleksije, konveksnost, konkavnost:

$$f''(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2 = 0 \quad\Rightarrow\Leftarrow \quad \text{nema točaka infleksije}$$

	$\langle -\infty, 1\rangle$	$\langle 1, +\infty\rangle$
$f''(x)$	$-$	$+$
	$\cap$	$\cup$

Funkcija je konveksna na $\langle 1, +\infty\rangle$.
Funkcija je konkavna na $\langle -\infty, 1\rangle$.



Slika 2.18: Graf funkcije $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

□

Zadatak 2.111. *Uz detaljne argumente grafički prikažite funkciju*

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Rješenje.

1. domena: $D_f = \mathbb{R}$.
2. nul-točke:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \quad &\Rightarrow \quad x + 1 = 0 \\ & \qquad\quad x = -1 \quad \Rightarrow \quad x_1^0 = -1 \end{aligned}$$

3. asimptote:
   Nema okomitih asimptota.

Desna kosa asimptota: pravac $y = kx + l$

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x\sqrt{x^2+1}} = 0, \\ l &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} \right) = 1, \\ &\Rightarrow \quad y = 1 \text{ je desna vodoravna asimptota} \end{aligned}$$

Lijeva kosa asimptota: pravac $y = kx + l$

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x\sqrt{x^2+1}} = 0, \\ l &= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} \right) = -1, \\ &\Rightarrow \quad y = -1 \text{ je lijeva vodoravna asimptota} \end{aligned}$$

4. stacionarne točke, rast, pad:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x+1)'(x^2+1)^{1/2} - (x+1)[(x^2+1)^{1/2}]'}{x^2+1} = \\ &= \frac{(x^2+1)^{1/2} - (x+1)\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2} \cdot 2x}{x^2+1} \\ &= \frac{x^2+1-(x+1)x}{(x^2+1)^{1/2}(x^2+1)} = \frac{1-x}{(x^2+1)^{3/2}} \\ f'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 1-x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 1 \quad \text{je stacionarna točka}$$

	$\langle -\infty, 1\rangle$	$\langle 1, +\infty\rangle$
$f'(x)$	$+$	$-$
	$\nearrow$	$\searrow$

5. ekstremi:

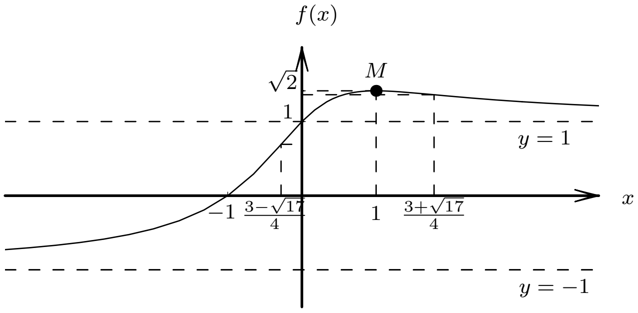
$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(1-x)'\cdot(x^2+1)^{3/2}-(1-x)[(x^2+1)^{3/2}]'}{(x^2+1)^3}\\
&= \frac{-(x^2+1)^{3/2}-(1-x)\frac{3}{2}(x^2+1)^{1/2}\cdot 2x}{(x^2+1)^3}\\
&= \frac{-(x^2+1)^{1/2}(x^2+1)-3x(1-x)(x^2+1)^{1/2}}{(x^2+1)^3}\\
&= \frac{(x^2+1)^{1/2}\cdot[-x^2-1-3x+3x^2]}{(x^2+1)^3} =\\
&= \frac{2x^2-3x-1}{(x^2+1)^{5/2}}\\
f''(1) &= \frac{-2}{2^{\frac{5}{2}}} < 0 \quad \Rightarrow \quad M(1,\sqrt{2})
\end{aligned}
$$

6. točke infleksije, konveksnost, konkavnost:
$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2-3x-1=0$

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{17}}{4} \approx 1.78, \quad x_2 = \frac{3-\sqrt{17}}{4} \approx -0.28$$

	$\langle -\infty, \frac{3-\sqrt{17}}{4}\rangle$	$\langle \frac{3-\sqrt{17}}{4}, \frac{3+\sqrt{17}}{4}\rangle$	$\langle \frac{3+\sqrt{17}}{4}, +\infty\rangle$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Funkcija je konkavna na $\langle \frac{3-\sqrt{17}}{4}, \frac{3+\sqrt{17}}{4}\rangle$.
Funkcija je konveksna na $\langle -\infty, \frac{3-\sqrt{17}}{4}\rangle$ i na $\langle \frac{3+\sqrt{17}}{4}, +\infty\rangle$.
x_1 i x_2 su točke infleksije.



Slika 2.19: Graf funkcije $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

$\square$

2.19 Ekonomske primjene. Ukupne, prosječne i granične veličine.

Zadatak 2.112. *Zadana je funkcija prosječnih prihoda* $AR(Q) = 15 - Q$*, gdje je* Q *količina proizvodnje.*

a) Odredite prosječni prihod na razini proizvodnje 5 *i interpretirajte.*

b) Odredite funkciju ukupnih prihoda u ovisnosti o proizvodnji Q*.*

c) Odredite granični prihod na razini proizvodnje 5 *i interpretirajte.*

Napomena:

→ Neka je $R(Q)$ **funkcija ukupnih prihoda** u ovisnosti o proizvodnji Q. Vrijednost $R(Q_0)$ kaže koliki je ukupan prihod ako smo proizveli Q_0 jedinica robe.

→ **Funkcija prosječnih prihoda** u ovisnosti o proizvodnji računa se po formuli:

$$AR(Q) = \frac{R(Q)}{Q}.$$

Vrijednost $AR(Q_0) = \frac{R(Q_0)}{Q_0}$ nazivamo **prosječnim prihodom na razini proizvodnje** Q_0 i ona nam govori koliki se prihod po jedinici proizvodnje prosječno ostvaruje gledajući do nivoa proizvodnje Q_0.

→ **Funkcija graničnih prihoda** u ovisnosti o proizvodnji računa se po formuli:

$$MR(Q) = r(Q) = \frac{dR(Q)}{dQ} = R'(Q).$$

Vrijednost $MR(Q_0)$ nazivamo **graničnim prihodom na razini proizvodnje** Q_0 i ona nam kaže koliko se brzo mijenja prihod baš onda kada je proizvodnja jednaka Q_0, tj. ako proizvodnju sa vrijednosti Q_0 povećamo za 1 jedinicu, za koliko jedinica će se promijeniti prihod. Naravno, ta brzina promjene je različita ovisno o nivou proizvodnje koji promatramo.

Rješenje.

a)

$$\begin{aligned} A(Q) &= 15 - Q \\ &\Rightarrow A(5) = 15 - 5 = 10 \end{aligned}$$

Interpretacija: do razine proizvodnje 5, po jedinici proizvodnje prosječno se ostvaruje prihod 10.

b)

$$AR(Q) = \frac{R(Q)}{Q} \quad \Rightarrow R(Q) = A(Q) \cdot Q$$
$$R(Q) = Q \cdot (15 - Q) = 15Q - Q^2$$

c)

$$\begin{aligned} MR(Q) = r(Q) &= R'(Q) \\ &= 15 - 2Q \\ &\Rightarrow \; r(5) = 5 \end{aligned}$$

Interpretacija: ako na razini proizvodnje 5 povećamo proizvodnju za 1 jedinicu, prihod će se povećati za 5 jedinica.

□

Zadatak 2.113. *Na određenoj razini proizvodnje, rad L i kapital C povezani su relacijom* $L \cdot C = 10$.
a) Izvedite graničnu stopu supstitucije rada kapitalom $\frac{dL}{dC}$.
b) Izvedite graničnu stopu supstitucije kapitala radom $\frac{dC}{dL}$.

Rješenje.

a) $L = \frac{10}{C} \;\Rightarrow\; \frac{dL}{dC} = -\frac{10}{C^2} < 0$
Kada se kapital C poveća za 1 jedinicu, rad se smanji za $\frac{10}{C^2}$ jedinica.

b) $C = \frac{10}{L} \;\Rightarrow\; \frac{dC}{dL} = -\frac{10}{L^2} < 0$
Kada se rad L poveća za 1 jedinicu, kapital C se smanji za $\frac{10}{L^2}$ jedinica.

□

Zadatak 2.114. *Dane su funkcija ukupnih prihoda* $R(Q) = -5Q^2 + 10Q$ *i ukupnih troškova* $T(Q) = 5Q^2 - 90Q$*, pri čemu je* Q *količina proizvodnje. Maksimizirajte dobit. Za koju količinu proizvodnje se ostvaruje maksimalna dobit?*

Rješenje.
Funkcija dobiti dana je sa:

$$\begin{aligned} D(Q) =& R(Q) - T(Q) \\ =& 10Q - 5Q^2 - 5Q^2 + 90Q \\ =& 100Q - 10Q^2. \end{aligned}$$

Tražimo maksimum:

$$\begin{aligned} D'(Q) &= 0 \\ 100 - 20Q &= 0 \\ &\Rightarrow \; Q = 5 \\ D''(Q) &= -20 \quad < 0 \quad \to \max \\ &\Rightarrow \; M(5, 250) \end{aligned}$$

Maksimum dobiti ostvaruje se na nivou proizvodnje $Q = 5$ i jednak je 250. □

2.20 Elastičnost funkcije

Uvodimo tzv. **koeficijent elastičnosti** funkcije $y = y(x)$ obzirom na x:

$$\begin{aligned} E_{y,x} &= \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}} = \\ &= \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \\ &= \frac{x}{y} \cdot y'. \end{aligned}$$

Interpretacija:

Izraz $\frac{dx}{x}$, odn. $\frac{dy}{y}$ označava relativnu (u postocima) promjenu varijable x, odn. funkcije y. Koeficijent elastičnosti funkcije $y = y(x)$ na nivou $x = x_0$ predstavlja odnos relativne promjene funkcije i relativne promjene varijable na nivou $x = x_0$.

Napomena:

- Ako je na nivou $x = x_0$ granična vrijednost jednaka prosječnoj vrijednosti, koeficijent elastičnosti funkcije y na nivou $x = x_0$ je jednak $E_{y,x} = 1$.
- Ako je na nivou $x = x_0$ $|E_{y,x}| < 1$, kažemo da je funkcija $y = y(x)$ **neelastična na nivou** x_0 (na tom nivou se funkcija apsolutno manje mijenja nego varijabla).

- Ako je na nivou $x = x_0$ $|E_{y,x}| > 1$, kažemo da je funkcija $y = y(x)$ **elastična na nivou** x_0 (na tom nivou se funkcija apsolutno više mijenja nego varijabla).
- Kažemo da je 'funkcija' $y = y(x)$ **savršeno elastična na nivou** $x = x_0$ ukoliko za fiksnu razinu nezavisne varijable x_0 'funkcija' može poprimiti bilo koju vrijednost (graf - okomiti pravac).
  Tada je $|E_{y,x}| = \infty$ na nivou $x = x_0$.
- Kažemo da je funkcija $y = y(x)$ **savršeno neelastična** ukoliko ona poprima konstantnu vrijednost za bilo koju razinu varijable x (graf - horizontalni pravac).
  Tada je $E_{y,x} = 0$ na svim nivoima.

Svojstva koeficijenta elastičnosti:

- $E_{y,x} = \frac{1}{E_{x,y}}$,
- $E_{\frac{f}{g},x} = E_{f,x} - E_{g,x}$.

Zadatak 2.115. *Zadana je funkcija potražnje* $q(p) = -p^2 + 10$, *gdje* p *predstavlja cijenu. Izračunajte koeficijent elastičnosti funkcije potražnje na nivou cijena* $p = 2$. *Interpretirajte rezultat.*

Rješenje.

$$E_{q,p} = \frac{p}{q} \cdot q'(p) = \frac{p}{-p^2 + 10} \cdot (-2p) = \frac{-2p^2}{-p^2 + 10}$$

$$E_{q,p}(p = 2) = \frac{-2 \cdot 4}{-4 + 10} = \frac{-4}{3}$$

Interpretacija:
Na nivou cijena $p = 2$ (onda kada je cijena 2), ako cijenu povećamo za 1% njezine vrijednosti, potražnja će se smanjiti (zbog predznaka $-$) za približno $\frac{4}{3}$%.

□

Zadatak 2.116. *Zadana je cijena kao funkcija potražnje* q, $p(q) = 100(2 + q)^{-2}$. *Odredite koeficijent elastičnosti* $E_{q,p}$ *na razini* $p = 4$ *i interpretirajte rezultat.*

Rješenje.
Najprije moramo izraziti q kao funkciju od p, $q = q(p)$:

$$\begin{aligned} p = \frac{100}{(2+q)^2} \quad \Rightarrow \; (2+q)^2 &= \frac{100}{p} \; \backslash\sqrt{\ } \\ 2+q &= \frac{10}{\sqrt{p}} \\ q &= \frac{10}{\sqrt{p}} - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{q,p} &= \frac{p}{\frac{10}{\sqrt{p}} - 2} \cdot \left(\frac{10}{\sqrt{p}} - 2\right)' = \\ &= \frac{p\cancel{\sqrt{p}}}{10 - 2\sqrt{p}} \cdot 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \cancel{p}^{-\frac{3}{2}} = \\ &= \frac{-5}{10 - 2\sqrt{p}} \\ E_{q,p}(p=4) &= \frac{-5}{10 - 2\sqrt{4}} = \frac{-5}{10-4} = -\frac{5}{6} \end{aligned}$$

Na nivou $p = 4$, ako cijenu povećamo za 1%, potražnja se smanji za približno $\frac{5}{6}\%$.

□

Zadatak 2.117. *Zadana je funkcija potražnje* $q(p) = \sqrt{20 - \frac{1}{2}p}$. *Za koju cijenu* p *je* $E_{q,p} = 1$*? Interpretirajte.*

Rješenje.
Prvo treba odrediti prirodnu domenu za cijene (na kojoj $q(p)$ ima smisla):

$$\begin{aligned} 20 - \frac{1}{2}p &\geq 0 \quad / \cdot 2 \\ 40 - p &\geq 0 \\ 40 &\geq p \\ p &\leq 40 \\ &\Rightarrow D = [0, 40] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{q,p} &= \frac{p}{\sqrt{20 - \frac{1}{2}p}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{20 - \frac{1}{2}p}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \\ &= \frac{-p}{4 \cdot (20 - \frac{1}{2}p)} = 1 \\ &\Rightarrow -p = 80 - 2p \quad \Rightarrow p = 80 \;\notin D \;\Rightarrow \text{ne postoji takav } p! \end{aligned}$$

Interpretacija: Ne može se dogoditi da se na nekom nivou p povećanjem cijene za 1% i potražnja poveća za 1%, jer je potražnja opadajuća funkcija cijene i kad cijena raste, potražnja pada.

□

Zadatak 2.118. *Za funkciju* $y(x) = x^a e^{bx}$ *odredite parametre* a *i* b *takve da za* $x = 1$ *vrijedi* $E_{y,x} = 5$, *a za* $x = 2$ $E_{y,x} = 8$.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
E_{y,x} &= \frac{x}{x^a e^{bx}} \cdot (ax^{a-1}e^{bx} + x^a e^{bx} \cdot b) = \\
&= \frac{x}{x^a \cancel{e^{bx}}} \cdot \cancel{e^{bx}} \cdot (ax^{a-1} + bx^a) = \\
&= x^{1-a} \cdot (ax^{a-1} + bx^a) = a + bx
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc}
a & + & b \cdot 1 & = & 5 \\
a & + & b \cdot 2 & = & 8
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccl}
a & + & b & = & 5 & \Rightarrow\ b = 5 - a \\
a & + & 2b & = & 8 & \Rightarrow\ a - 2a + 10 = 8 \\
 & & & & & \Rightarrow a = 2,\ b = 3
\end{array}$$

□

Zadatak 2.119. *Odredite područje elastičnosti i neelastičnosti funkcije potražnje* $q(p) = \frac{100-p^2}{3}$.

Rješenje.
Ekonomske varijable moraju imati smisla:

$$\begin{aligned}
p &\geq 0, \\
q(p) &\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 100 - p^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad p \in [-10, 10] \\
&\Longrightarrow \quad p \in [0, 10]
\end{aligned}$$

$E_{q,p} = \frac{p}{\frac{100-p^2}{\cancel{3}}} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{3}} \cdot 2p\right) = \frac{-2p^2}{100-p^2}$

$$\begin{aligned}
\text{elastičnost} \;\Leftrightarrow \qquad & |E_{q,p}| > 1 \\
& \left|\frac{-2p^2}{100-p^2}\right| > 1 \;\; (100-p^2 \geq 0,\; -2p^2 \leq 0) \\
& \frac{2p^2}{100-p^2} > 1 \\
& \frac{3p^2-100}{100-p^2} > 0 \;\; (100-p^2 \geq 0,\; 0 \text{ u nazivniku daje } |E_{q,p}| = \infty) \\
& p^2 > \frac{100}{3} /\sqrt{\ } \;\; (p \geq 0) \\
& p > \frac{10}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ na nivoima $p \in \langle \frac{10}{\sqrt{3}}, 10]$ funkcija je elastična, a na $p \in [0, \frac{10}{\sqrt{3}}\rangle$ neelastična!

□

Zadatak 2.120. *Dan je koeficijent elastičnosti funkcije ukupnih troškova* $T(Q)$, $E_{T,Q} = \frac{Q}{\sqrt{Q+2}}$. *Odredite količinu proizvodnje za koju su prosječni troškovi jednaki graničnima.*

Rješenje.

$$\begin{aligned}
E_{T,Q} = \frac{Q}{T} \cdot \frac{dT}{dQ} = \frac{Q}{T} \cdot \frac{T}{Q} = 1 \quad \Rightarrow \quad & \frac{Q}{\sqrt{Q+2}} = 1 \\
& Q = \sqrt{Q+2} \;/()^2 \\
& Q^2 = Q+2 \\
& Q^2 - Q - 2 = 0 \\
& \Rightarrow \; Q_1 \cancel{=} -1, \quad Q_2 = 2\checkmark
\end{aligned}$$

□

DZ 2.121. *Uz koju cijenu je funkcija potražnje* $q(p) = \frac{a-p^2}{b}$ *savršeno elastična? Interpretirajte.*

Rješenje.

$$\begin{aligned}
E_{q,p} &= \frac{p}{\frac{a-p^2}{b}} \cdot \left(-\frac{1}{b} \cdot 2p\right) = \frac{-2p}{a-p^2} \\
& \left|\frac{-2p^2}{a-p^2}\right| = \infty \;\Leftrightarrow\; a - p^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; p = \sqrt{a}
\end{aligned}$$

Za cijenu $p = \sqrt{a}$ je funkcija potražnje savršeno elastična. To znači da na razini cijene $p = \sqrt{a}$ možemo postići bilo koju razinu potražnje.

$\square$

DZ 2.122. *Za koju je vrijednost cijene* p *elastičnost funkcije potražnje* $q(p) = \sqrt{8 - p^2}$ *jedinična?*

Rješenje. ($|E_{q,p}| = 1 \;\Leftrightarrow p = 2$)

Zadatak 2.123. *Odredite područje elastičnosti i neelastičnosti funkcije potražnje,* $q(p) = \sqrt{4 - p}$.

Rješenje. (elastična za $p \in \langle \frac{8}{3}, 4]$)

Zadatak 2.124. *Dana je funkcija ukupnih troškova proizvodnje,* $T(Q) = 0.01Q^2 + 20Q + 900$. *Odredite elastičnost ukupnih i prosječnih troškova na nivou proizvodnje* $Q = 200$.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
E_{T,Q} &= \frac{Q}{T} \cdot T'(Q) = \frac{Q}{0.01Q^2 + 20Q + 900} \cdot (0.02Q + 20) = \\
&= \frac{0.02Q^2 + 20Q}{0.01Q^2 + 20Q + 900} \\
E_{T,Q}(Q = 200) &= \frac{4800}{5300} = \frac{48}{53} \\
&\Rightarrow Q = 200 : \quad Q \uparrow 1\% \;\Rightarrow\; T(Q) \uparrow \frac{48}{53}\%
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{\frac{T}{Q},Q} &= E_{T,Q} - E_{Q,Q} = E_{T,Q} - 1 = -\frac{5}{53} \\
&\Rightarrow Q = 200 : \quad Q \uparrow 1\% \;\Rightarrow\; A(Q) = \frac{T(Q)}{Q} \downarrow \frac{5}{53}\%
\end{aligned}$$

$\square$

Zadatak 2.125. *Ako je koeficijent elastičnosti funkcije prosječnih troškova* $E_{\frac{T}{Q},Q} = \frac{Q-2}{Q+1}$, *izvedite koeficijent elastičnosti funkcije ukupnih troškova.*

Rješenje.

$$\begin{aligned}
E_{\frac{T}{Q},Q} &= E_{T,Q} - E_{Q,Q} = E_{T,Q} - 1 \\
&\Rightarrow E_{T,Q} = E_{\frac{T}{Q},Q} + 1 = \frac{Q-2}{Q+1} + 1 = \frac{2Q-1}{Q+1}.
\end{aligned}$$

$\square$

Poglavlje 3

FUNKCIJE VIŠE VARIJABLI

3.1 Homogene funkcije, homogenost

Napomena:
Kažemo da je funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **homogena stupnja** α ako i samo ako vrijedi:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^\alpha f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Zadatak 3.1. *Ispitajte da li su sljedeće funkcije homogene i nađite im stupanj homogenosti.*

Rješenje.

a) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_3 \cdot \sqrt{\ln \frac{x_1+x_2}{x_2+x_3}}$

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) &= (\lambda x_1)(\lambda x_3)\sqrt{\ln \frac{\lambda x_1 + \lambda x_2}{\lambda x_2 + \lambda x_3}} \\ &= \lambda^2 x_1 x_3 \sqrt{\ln \frac{\lambda(x_1 + x_2)}{\lambda(x_2 + x_3)}} \\ &= \lambda^2 \underbrace{x_1 x_3 \sqrt{\ln \frac{x_1 + x_2}{x_2 + x_3}}}_{= f(x_1, x_2, x_3)} \\ &= \lambda^2 f(x_1, x_2, x_3) \\ \Rightarrow \quad & \alpha = 2 \end{aligned}$$

b) $f(x,y) = x^2 + y^2 \ln x$

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 \ln(\lambda x) \\ &= \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 \ln(\lambda x) \\ &= \lambda^2 \cdot [\underbrace{x^2 + y^2 \ln(\underline{\lambda} x)}_{\neq f(x,y)}] \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$nije homogena funkcija

c)

$f(x,y,z) = 3x^2\sqrt{y}\ln z \;\; \rightarrow$ odmah vidimo da se, kao i u b) dijelu zadatka, iz $\ln(\lambda z)$ neće moći izlučiti λ $\Rightarrow$ f nije homogena funkcija

ALI:

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y, z) &= 3(\lambda x)^2 \sqrt{\lambda y} \ln z \\ &= 3\lambda^2 x^2 \lambda^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \ln z \\ &= \lambda^2 \lambda^{\frac{1}{2}} \cdot 3x^2 \sqrt{y} \ln z \\ &= \lambda^{\frac{5}{2}} \cdot \underbrace{3x^2\sqrt{y}\ln z}_{= f(x,y,z)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ je **parcijalno homogena** u varijablama x i y stupnja homogenosti $\alpha = \frac{5}{2}$.

d) $Q(L,C) = 1.3[0.3L^{-0.5} + 0.7C^{-0.5}]^{-2}$

$$\begin{aligned} Q(\lambda L, \lambda C) &= 1.3[0.3(\lambda L)^{-0.5} + 0.7(\lambda C)^{-0.5}]^{-2} \\ &= 1.3[0.3\lambda^{-0.5}L^{-0.5} + 0.7\lambda^{-0.5}C^{-0.5}]^{-2} \\ &= 1.3(\lambda^{-0.5})^{-2}[0.3L^{-0.5} + 0.7C^{-0.5}]^{-2} \\ &= \lambda^1 \cdot \underbrace{1.3[0.3L^{-0.5} + 0.7C^{-0.5}]^{-2}}_{= Q(L,C)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow Q$ je homogena funkcija stupnja homogenosti $\alpha = 1$

e) $f(x,y) = \log \frac{x^2+xy}{y^2}$

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= \log \frac{(\lambda x)^2 + (\lambda x)(\lambda y)}{(\lambda y)^2} = \log \frac{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 xy}{\lambda^2 y^2} \\ &= \log \frac{\lambda^2 (x^2 + xy}{\lambda^2 y^2} = \log \frac{x^2 + xy}{y^2} = f(x,y) = \lambda^0 f(x,y) \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ je homogena funkcija stupnja homogenosti $\alpha = 0$

f) Cobb-Douglasova funkcija proizvodnje: $Q(L,C) = 0.3L^{0.4}C^{0.6}$

$$\Rightarrow \text{homogena, } \alpha = 0.4 + 0.6 = 1$$

g) Cobb-Douglasova funkcija u logaritamskom obliku:

$$\ln Q(L,C) = 0.2 \ln L + 0.8 \ln C + 3$$

$$\Rightarrow Q \text{ je homogena, } \alpha = 0.2 + 0.8 = 1$$

h) Funkcija potražnje za proizvodom 2 u ovisnosti o cijenama proizvoda 1 i 2:

$$\ln q_2(p_1, p_2) = 1.2 \ln p_1 - 0.3 \ln p_2 + 1$$

$$\Rightarrow \text{homogena, } \alpha = 1.2 - 0.3 = 0.9$$

□

Zadatak 3.2. *Zadana je funkcija*

$$z(x,y) = x \sqrt[3]{\frac{x^4 + 5x^2y^2 + 4y^4}{2x + y}}.$$

Za koliko će se postotaka promijeniti funkcijska vrijednost od z *ako se varijable* x *i* y *istovremeno povećaju* 10%*?*

Rješenje.

$$x \to x + \frac{10}{100}x = 1.1x$$

$$y \to y + \frac{10}{100}y = 1.1y$$

Računamo $z(1.1x, 1.1y) \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1.1$

$$\begin{aligned}
z(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)\sqrt[3]{\frac{(\lambda x)^4 + 5(\lambda x)^2(\lambda y)^2 + 4(\lambda y)^4}{2(\lambda x) + (\lambda y)}} \\
&= \lambda x \cdot \sqrt[3]{\frac{\lambda^4 x^4 + 5\lambda^2 x^2 \lambda^2 y^2 + 4\lambda^4 y^4}{2\lambda x + \lambda y}} \\
&= \lambda x \cdot \sqrt[3]{\frac{\lambda^4(x^4 + 5x^2y^2 + 4y^4)}{\lambda(2x + y)}} \\
&= \lambda x \cdot \sqrt[3]{\lambda^3} \cdot \sqrt[3]{\frac{x^4 + 5x^2y^2 + 4y^4}{2x + y}} \\
&= \lambda^2 \cdot x\sqrt[3]{\frac{x^4 + 5x^2y^2 + 4y^4}{2x + y}} = 1.1^2 \cdot z(x, y) \\
&= 1.21 \cdot z(x, y)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Vrijednost funkcije z će se povećati za 21%.

$\square$

Zadatak 3.3. *Dana je funkcija* $Q(L, C) = 1.5L^sC^{0.7}$. *Odredite parametar* $s \in \mathbb{R}, s \neq 0$, *takav da vrijednost funkcije* $Q(L, C)$ *uslijed smanjenja varijabli za* 3.6% *ostane nepromijenjena.*

Rješenje.

$$L \to L - \frac{3.6}{100}L = 0.964L$$
$$C \to C - \frac{3.6}{100}C = 0.964C$$

$\Rightarrow \lambda = 0.964$ i želimo da vrijedi $Q(\lambda L, \lambda C) = Q(L, C) = \lambda^0 Q(L, C)$
Drugim riječima, želimo da funkcija $Q(L, C)$ bude homogena stupnja homogenosti $\alpha = 0$.

$$Q(\lambda L, \lambda C) = 1.5(\lambda L)^s(\lambda C)^{0.7} = \lambda^{s+0.7}Q(L, C)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = s + 0.7 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{s = -0.7}$$

$\square$

Napomena:

Za homogenu funkciju sa stupnjem homogenosti α kažemo da ima:

- **opadajuće prinose** ukoliko je $0 < \alpha < 1$,
- **konstantne prinose** ukoliko je $\alpha = 1$,
- **rastuće prinose** ukoliko je $\alpha > 1$.

Zadatak 3.4. *Dana je funkcija* $Q(L,C) = 0.3L^{0.7}C^{0.3}$. *Kakvi su prinosi u pitanju? Za koliko će se postotaka promijeniti količina proizvodnje ako se rad i kapital istovremeno povećaju za* 5%*?*

Rješenje.

$$\alpha = 0.7 + 0.3 = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{U pitanju su konstantni prinosi.}$$

$$Q(1.05L, 1.05C) = 1.05^{\alpha} \cdot Q(L,C) = 1.05 \cdot Q(L,C)$$

Ako se rad i kapital istovremeno povećaju za 5%, količina proizvodnje će se također povećati za 5%. □

DZ 3.5. *Ispitajte homogenost funkcije:*

a) $f(x,y,z) = 200x^2\sqrt{z}e^{0.01y}$,

b) $\ln q_1(p_1,p_2,t) = -3.2\ln p_1 + 0.2\ln p_2 + 0.3t + 1$.

3.2 Parcijalne derivacije

Parcijalnu derivaciju funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ u točki $(x_1,\dots,x_n)$ **po i-toj varijabli** definiramo kao

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,\dots,x_i+h,\dots,x_n) - f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)}{h},$$

ukoliko taj limes postoji.
Za parcijalnu derivaciju funkcije f po i-toj varijabli koriste se sljedeće oznake:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = f_i.$$

Za parcijalno deriviranje funkcija više varijabli vrijede ista pravila kao i za deriviranje funkcija jedne varijable uz napomenu da zamišljamo da su sve varijable, osim one po kojoj trenutno deriviramo, zapravo konstante.

Zadatak 3.6. *Nađite parcijalne derivacije funkcije* $f(x,y) = 3x^2 + xy + \sqrt{y}$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} f_x &= 3 \cdot 2x^1 + 1 \cdot y + 0 = 6x + y \\ f_y &= 0 + x \cdot 1 + \frac{1}{2\sqrt{y}} = x + \frac{1}{\sqrt{y}} \end{aligned}$$

□

Zadatak 3.7. *Nađite parcijalne derivacije funkcije* $z(x,y) = (x + 2y)e^{x^2+y^3}$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} z_x &= (1+0)e^{x^2+y^3} + (x+2y)e^{x^2+y^3}(2x+0) \\ &= e^{x^2+y^3}(1 + 2x(x+2y)) \\ &= e^{x^2+y^3}(1 + 2x^2 + 4xy) \\ z_y &= (0+2)e^{x^2+y^3} + (x+2y)e^{x^2+y^3}(0+3y^2) \\ &= e^{x^2+y^3}(2 + 3y^2(x+2y)) \\ &= e^{x^2+y^3}(2 + 3xy^2 + 6y^3) \end{aligned}$$

□

Zadatak 3.8. *Nađite parcijalne derivacije funkcije* $f(x,y,z) = e^{2xz} - \ln yz + 1$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} f_x &= e^{2xz}2z - 0 + 0 = 2ze^{2xz} \\ f_y &= 0 - \frac{1}{yz}z + 0 = -\frac{1}{y} \\ f_z &= e^{2xz}2x - \frac{1}{yz}y = 2xe^{2xz} - \frac{1}{z} \end{aligned}$$

□

Zadatak 3.9. *Nađite parcijalne derivacije funkcije* $u(x,y) = \frac{2x-y}{x+y}$.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{(2\cdot 1-0)(x+y)-(2x-y)(1+0)}{(x+y)^2}\\
&= \frac{2x+2y-2x+y}{(x+y)^2} = \frac{3y}{(x+y)^2}\\
u_y &= \frac{(0-1)(x+y)-(2x-y)(0+1)}{(x+y)^2}\\
&= \frac{-x-y-2x+y}{(x+y)^2} = \frac{-3x}{(x+y)^2}
\end{aligned}$$

□

Zadatak 3.10. *Zadana je funkcija* $f(x,y,z)=\sqrt{x^2-y^2}+\sqrt{2xz+1}+\ln(y+e)$*. Izračunajte* $f_x(1,0,4)$*.*

Rješenje.

$$\begin{aligned}
f_x(x,y,z) &= \frac{1}{2\sqrt{x^2-y^2}}\cdot 2x + \frac{1}{2\sqrt{2xz+1}}\cdot 2z + 0\\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} + \frac{z}{\sqrt{2xz+1}}\\
f_x(1,0,4) &= \frac{1}{\sqrt{1^2-0^2}} + \frac{4}{\sqrt{2\cdot 1\cdot 4+1}}\\
&= 1+\frac{4}{3} = \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

□

3.3 Totalni diferencijal

Neka je $z=f(x,y)$ diferencijabilna funkcija dvije varijable. Ako su dx i dy proizvoljni realni brojevi, definiramo **totalni diferencijal** od $z=f(x,y)$ u (x,y), označen sa dz ili df, kao

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Kada se x promijeni u $x + dx$, a y u $y + dy$, tada promjenu funkcijske vrijednosti zovemo **prirast**

$$\triangle z = f(x + dx, y + dy) - f(x, y).$$

Ako su dx i dy mali u apsolutnoj vrijednosti, tada $\triangle z$ možemo aproksimirati sa dz

$$\triangle z \approx dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Zadatak 3.11. *Za koliko se približno promijeni vrijednost funkcije* $z(x, y) = xe^y$ *ako* $x = 1$ *poraste na* 1.15*, a* $y = 1$ *padne na* 0.9*?*

Rješenje.

$$\begin{aligned} x &= 1, \quad dx = 1.15 - 1 = 0.15 \\ y &= 1, \quad dy = 0.9 - 1 = -0.1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle z \approx dz &= z_x dx + z_y dy \\ &= e^y dx + xe^y dy \\ &= e^1 \cdot 0.15 + 1 \cdot e^1 \cdot (-0.1) \\ &= e \cdot (0.15 - 0.1) = 0.05e \end{aligned}$$

□

3.4 Koeficijenti parcijalne i križne elastičnosti

Koeficijent parcijalne elastičnosti funkcije dvije varijable, $f(x, y)$, **u odnosu na varijablu** x definira se kao

$$E_{f,x} = \frac{x}{f} \cdot f_x$$

Interpretacija:
$E_{f,x}$ na nivou $(x, y) = (x_0, y_0)$ nam govori za koliko se približno posto poveća vrijednost funkcije f, ako se varijabla x iz nivoa x_0 poveća za 1%, a varijabla y ostane nepromijenjena.

Analogno se definira i **koeficijent parcijalne elastičnosti** funkcije dvije varijable, $f(x, y)$, **u odnosu na varijablu** y:

$$E_{f,y} = \frac{y}{f} \cdot f_y$$

Interpretacija:

$E_{f,x}$ na nivou $(x, y) = (x_0, y_0)$ nam govori za koliko se približno posto poveća vrijednost funkcije f, ako se varijabla y iz nivoa y_0 poveća za 1%, a varijabla x ostane nepromijenjena.

Zadatak 3.12. *Izračunajte koeficijente parcijalne elastičnosti funkcije* $f(x, y) = \sqrt{x - y^2}$ *u odnosu na varijable* x *i* y*, te interpretirajte rezultat na nivou* $x = 25$*,* $y = 3$*.*

Rješenje.

$$\begin{aligned} E_{f,x} &= \frac{x}{f} \cdot f_x = \frac{x}{\sqrt{x - y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x - y^2}} \cdot 1 = \frac{x}{2(x - y^2)} \\ E_{f,x}(25, 3) &= \frac{25}{2(25 - 9)} = \frac{25}{32} \end{aligned}$$

Na nivou $x = 25$, $y = 3$ kada x povećamo za 1% vrijednost funkcije f će se povećati približno za $\frac{25}{32}$%.

$$\begin{aligned} E_{f,y} &= \frac{y}{f} \cdot f_y = \frac{y}{\sqrt{x - y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x - y^2}} \cdot (-2y) = \frac{-y^2}{x - y^2} \\ E_{f,y}(25, 3) &= \frac{-9}{25 - 9} = \frac{-9}{16} \end{aligned}$$

Na nivou $x = 25$, $y = 3$ kada y povećamo za 1% vrijednost funkcije f će se smanjiti približno za $\frac{9}{16}$%. □

Pretpostavimo da na tržistu imamo dva proizvoda. Označimo sa p_1 cijenu prvog, a sa p_2 cijenu drugog. q_1 neka je potražnja za prvim proizvodom. Kako ona ovisi o cijeni tog proizvoda, ali i o cijeni drugog proizvoda, q_1 je zapravo funkcija dvije varijable, tj. $q_1 = q_1(p_1, p_2)$. Analogno, $q_2(p_1, p_2)$ je funkcija potražnje za drugim proizvodom.

Koeficijenti križne elastičnosti su specijalni slučaj koeficijenata parcijalne elastičnosti i opisuju ponašanje funkcije potražnje jednog proizvoda u slučaju kada se mijenja cijena drugog proizvoda. Dakle koeficijenti križne elastičnosti su E_{q_1,p_2} i E_{q_2,p_1}.

- Kažemo da je neki proizvod **normalno dobro** ukoliko povećanje cijene tog proizvoda (dobra) uzrokuje pad potražnje za tim dobrom ($p_1 \uparrow \Rightarrow q_1 \downarrow$).
- **Proizvodi su supstituti** ukoliko rast cijene jednog od njih uzrokuje rast potražnje za drugim. ($p_2 \uparrow \Rightarrow q_1 \uparrow$).
- **Proizvodi su komplementi** ukoliko rast cijene jednog od njih uzrokuje pad potražnje za drugim. ($p_2 \uparrow \Rightarrow q_1 \downarrow$).

Zadatak 3.13. *Dana je funkcija potražnje* $q_1(p_1, p_2) = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{5}{p_2}$. *Izračunajte i interpretirajte koeficijente parcijalne i križne elastičnosti na nivou cijena* $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, *te interpretirajte rezultat. Jesu li proizvodi komplementi ili supstituti?*

Rješenje.
koeficijent parcijalne elastičnosti:

$$E_{q_1,p_1} = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial p_1} = \frac{p_1}{\frac{1}{2}p_1^2 + \frac{5}{p_2}} \cdot p_1 = \frac{p_1^2}{\frac{1}{2}p_1^2 + \frac{5}{p_2}}$$

$$E_{q_1,p_1}(1,2) = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{5}{2}} = \frac{1}{3}$$

Na nivou cijena $p_1 = 1, p_2 = 2$, kada cijenu prvog proizvoda (p_1) povećamo za 1% potražnja za tim proizvodom (q_1) poraste približno za $\frac{1}{3}$%. Zaključujemo da prvi proizvod nije normalno dobro.

koeficijent križne elastičnosti:

$$E_{q_1,p_2} = \frac{p_2}{q_1} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial p_2} = \frac{p_2}{\frac{1}{2}p_1^2 + \frac{5}{p_2}} \cdot (-\frac{5}{p_2^2}) = \frac{-5}{p_2(\frac{1}{2}p_1^2 + \frac{5}{p_2})} = \frac{-5}{\frac{1}{2}p_1^2 p_2 + 5}$$

$$E_{q_1,p_2}(1,2) = \frac{-5}{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 + 5} = -\frac{5}{6}$$

Na nivou cijena $p_1 = 1, p_2 = 2$, kada cijenu drugog proizvoda (p_2) povećamo za 1% potražnja za prvim proizvodom (q_1) smanji se približno za $\frac{5}{6}$%. Zaključujemo da su proizvodi komplementi. ☐

Zadatak 3.14. *Zadana je funkcija proizvodnje* $Q(L, C) = 2\sqrt{L^3C}$. *Izračunajte* $E_{Q,L}$ *i* $E_{Q,C}$.

Rješenje.

$$Q(L,C) = 2 \cdot L^{\frac{3}{2}} C^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \text{Cobb-Douglasova funkcija}$$
$$\Rightarrow E_{Q,L} = \tfrac{3}{2},\ E_{Q,C} = \tfrac{1}{2}$$

□

Zadatak 3.15. *Zadano je* $\ln q_1 = -1 - 1.423 \ln p_1 + 4 \ln p_2$. *Izračunajte koeficijente parcijalne i križne elastičnosti funkcije* q_1.

Rješenje.

$$E_{q_1,p_1} = -1.423 \quad \text{(proizvod 1 je normalno dobro)}$$
$$E_{q_1,p_2} = 4 \quad \text{(proizvodi su supstituti)}$$

□

3.5 Eulerov teorem

Teorem 3.16 (Eulerov teorem)**.**
Neka je $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *homogena realna funkcija* n *realnih varijabli, sa stupnjem homogenosti* α. *Tada vrijedi:*

$$x_1 f_{x_1} + x_2 f_{x_2} + \ldots + x_n f_{x_n} = \alpha \cdot f \quad / : f,$$
$$E_{f,x_1} + E_{f,x_2} + \ldots + E_{f,x_n} = \alpha.$$

Zadatak 3.17. *Zadana je funkcija*

$$f(x,y) = x^2 \cdot y^{-3} \cdot \ln \frac{x(y-x)}{y^2}.$$

Izračunajte $xf_x + yf_y$.

Rješenje.
Prvo provjerimo da li je f homogena i, ako jest, kojeg stupnja:

$$\begin{aligned}
f(\lambda x, \lambda y) =& (\lambda x)^2 \cdot (\lambda y)^{-3} \cdot \ln \frac{\lambda x \cdot (\lambda y - \lambda x)}{(\lambda y)^2} \\
=& \lambda^2 x^2 \lambda^{-3} y^{-3} \ln \frac{\cancel{\lambda} x \cdot \cancel{\lambda} \cdot (y-x)}{\cancel{\lambda^2} y^2} \\
=& \lambda^{-1} \underbrace{x^2 y^{-3} \ln \frac{x(y-x)}{y^2}}_{f(x,y)}
\end{aligned}$$
$$\Rightarrow\ f \text{ homogena stupnja } \alpha = -1.$$

Sada primjenom *Eulerovog teorema* dobivamo:

$$\Rightarrow \; xf_x + yf_y = -1 \cdot f = -x^2 y^{-3} \ln \frac{x(y-x)}{y^2}.$$

$\square$

Zadatak 3.18. *Zadana je funkcija*

$$f(x,y) = \sqrt[t]{x}(\ln x - \ln y) + y^{\frac{1}{t}}.$$

Odredite parametar $t \in \mathbb{R}$*,* $t \neq 0$*, takav da vrijedi* $xf_x = -yf_y$*.*

Rješenje.
Prvo provjerimo homogenost funkcije f:

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) =& \sqrt[t]{\lambda x}(\ln(\lambda x) - \ln(\lambda y)) + (\lambda y)^{\frac{1}{t}} \\ =& \lambda^{\frac{1}{t}} x^{\frac{1}{t}} \cdot \ln \frac{\cancel{\lambda} x}{\cancel{\lambda} y} + \lambda^{\frac{1}{t}} y^{\frac{1}{t}} \\ =& \lambda^{\frac{1}{t}} \cdot \left(x^{\frac{1}{t}} \ln \frac{x}{y} + y^{\frac{1}{t}} \right) \\ =& \lambda^{\frac{1}{t}} \cdot \underbrace{\left(\sqrt[t]{x}(\ln x - \ln y) + \sqrt[t]{y} \right)}_{f(x,y)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \; f \text{ homogena stupnja } \alpha = \frac{1}{t}.$$

Primjenom *Eulerovog teorema* dobivamo:

$$xf_x + yf_y = \alpha \cdot f = \frac{1}{t} \cdot f = (\text{uvjet zadatka}) = 0.$$

Kako f nije svuda jednaka 0, slijedi $\frac{1}{t} = 0$, što nije moguće.
Zaključimo, ne postoji takav $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Zadatak 3.19. *Odredite parametar* $t \in \mathbb{R}$*,* $t > 0$*, takav da vrijedi*

$$xu_x + yu_y + zu_z = u,$$

ako je $\ln u(x,y,z) = -\ln 2 + \ln \sqrt[t]{x^2} - \ln \sqrt[t+1]{y} - \ln \sqrt[t+1]{z}$.

Rješenje.
Ispitujemo homogenost u:

$$\begin{aligned} \ln u(x,y,z) =& -\ln 2 + \ln x^{\frac{2}{t}} - \ln y^{\frac{1}{t+1}} - \ln z^{\frac{1}{t+1}} \\ =& -\ln 2 + \frac{2}{t} \ln x - \frac{1}{t+1} \ln y - \frac{1}{t+1} \ln z \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \; \text{homogena, } \alpha = \frac{2}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+1} = \frac{2}{t} - \frac{2}{t+1}.$$

Eulerov teorem $\Rightarrow \quad \alpha = 1,$

$$\frac{2}{t} - \frac{2}{t+1} = 1,$$

$$\frac{2}{t} - \frac{2}{t+1} - 1 = 0,$$

$$\frac{2 - t^2 - t}{t(t+1)} = 0 \qquad \Rightarrow -t^2 - t + 2 = 0 \ \Rightarrow \ t_1 = -2, \ t_2 = 1.$$

Zbog $t > 0 \ \Rightarrow t = 1.$

□

Zadatak 3.20. *Dana je funkcija*

$$f(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{y}} \ln z.$$

Izračunajte $xf_x + yf_y + zf_z$.

Rješenje.
Funkcija f je parcijalno homogena sa koeficijentom $\alpha = \frac{1}{2}$ jer je

$$f(\lambda x, \lambda y, z) = \frac{\lambda x}{\sqrt{\lambda y}} \ln z = \lambda^{\frac{1}{2}} \underbrace{\frac{x}{\sqrt{y}} \ln z}_{f(x,y,z)}.$$

$$\Rightarrow \text{(Euler)} \quad xf_x + yf_y = \frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{y}} \ln z \quad \text{(fiksiramo } z\text{, kao da je neka konstanta).}$$

Ostaje nam derivirati f po z: $f_z = \frac{x}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \ zf_z = \cancel{z} \cdot \frac{x}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\cancel{z}} = \frac{x}{\sqrt{y}}.$

$$\Rightarrow \ xf_x + yf_y + zf_z = \frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{y}} \ln z + \frac{x}{\sqrt{y}}.$$

□

Zadatak 3.21. *Dana je funkcija potražnje za proizvodom 1 u ovisnosti o cijenama proizvoda 1 i proizvoda 2:*

$$q_1(p_1, p_2) = 2p_2(2p_2^t + p_1^t)^{-t}.$$

Odredite parametar $t \in \mathbb{R}$ *takav da je suma parcijalne i križne elastičnosti jednaka 0.*

Rješenje.

$$E_{q_1,p_1} + E_{q_1,p_2} = 0 = (\text{Euler}) = \alpha$$

$$\begin{aligned} q_1(\lambda p_1, \lambda p_2) =& 2\lambda p_2 (2\lambda^t p_2^t + \lambda^t p_1^t)^{-t} \\ =& 2\lambda p_2 [\lambda^t \cdot (2p_2^t + p_1^t)]^{-t} \\ =& 2\lambda p_2 \cdot \lambda^{-t^2} \cdot (2p_2^t + p_1^t)^{-t} \\ =& \lambda^{1-t^2} \cdot \underbrace{2p_2 \cdot (2p_2^t + p_1^t)^{-t}}_{q_1(p_1,p_2)} \\ & \Rightarrow \ q_1 \text{ homogena, } \alpha = 1 - t^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ 1 - t^2 = 0 \quad \Rightarrow \ t = \pm 1.$$

□

Zadatak 3.22. *Neka je dana funkcija proizvodnje u ovisnosti o radu L i kapitalu C,* $Q(L, C) = 0.5L\sqrt{C}$. *Izračunajte sumu svih parcijalnih elastičnosti proizvodnje.*

Rješenje.
$Q(L, C) = 0.5L^1 C^{\frac{1}{2}} \rightarrow$ homogena s koeficijentom $\alpha = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$$(\text{Euler}) \ \Rightarrow \ E_{Q,L} + E_{Q,C} = \alpha = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

$\Rightarrow Q$ je funkcija rastućih prinosa ($\alpha > 1$). □

Zadatak 3.23. *Neka je dana funkcija proizvodnje* $Q(L, C, t) = 0.5L\sqrt{C}e^{0.3t}$. *Izračunajte sumu svih parcijalnih elastičnosti proizvodnje.*

Rješenje.
Po prethodnom zadatku je $E_{Q,L} + E_{Q,C} = \frac{3}{2}$.

$$E_{Q,t} = \frac{t}{Q} \cdot Q_t = \frac{t}{0.5L\sqrt{C}e^{0.3t}} \cdot 0.5L\sqrt{C}e^{0.3t} \cdot 0.3 = 0.3t.$$

$$\Rightarrow \ E_{Q,L} + E_{Q,C} + E_{Q,t} = \frac{3}{2} + 0.3t.$$

□

Zadatak 3.24. *Zadana je Cobb-Douglasova funkcija proizvodnje u logaritamskom obliku,*

$$\ln Q = 0.23 + 0.23 \ln L + 0.35 \ln C.$$

Izračunajte sumu svih parcijalnih elastičnosti proizvodnje.

Rješenje.
$E_{Q,L} + E_{Q,C} = \text{(Euler)} = \alpha = 0.23 + 0.35 = 0.58$
$\Rightarrow$ Q je funkcija opadajućih prinosa ($\alpha < 1$). ☐

Zadatak 3.25. *Funkcija potražnje za proizvodom A homogena je stupnja 1, te ovisi o cijeni proizvoda A i B. Ako je koeficijent elastičnosti te funkcije u odnosu na cijenu proizvoda A jednak -0.5, izračunajte vrijednost koeficijenta elastičnosti te iste funkcije potražnje u odnosu na cijenu proizvoda B, te ga interpretirajte.*

Rješenje.
Neka su p_A i p_B cijene proizvoda A, odn. B, a $q_A = q_A(p_A, p_B)$ funkcija potražnje za proizvodom A.

$$\begin{aligned} E_{q_A,p_A} + E_{q_A,p_B} &= \alpha \\ -0.5 + E_{q_A,p_B} &= 1 \\ &\Rightarrow \; E_{q_A,p_B} = 1 + 0.5 = 1.5 \end{aligned}$$

Interpretacija: Ako cijena proizvoda B naraste za 1%, potražnja za proizvodom A poraste približno za 1.5% ($p_B \uparrow 1\% \;\Rightarrow\; q_A \uparrow 1.5\%$). Proizvodi A i B su *supstituti.* ☐

3.6 Implicitno zadane funkcije

Pretpostavimo da je jednadžbom $F(y, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ implicitno definirana funkcija $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (tj. da se iz jednadžbe y može izraziti kao funkcija od $x_1, \ldots, x_n$).
Tada su parcijalne derivacije od f dane sa:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = -\frac{F_{x_i}}{F_y}.$$

Zadatak 3.26. *Neka je funkcija $y = y(x)$ dana implicitno formulom $F(y, x) = x^2 + xy + y^2 - 6$. Odredite y'(x).*

Rješenje.
Prije bismo to izračunali ovako (vidi derivacije implicitne funkcije):

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 - 6 &= 0 \quad /()' \\ 2x + y + xy' + 2yy' &= 0 \\ y' \cdot (2y + x) &= -(2x + y) \\ y' = y'(x) &= -\frac{2x + y}{x + 2y} \end{aligned}$$

Sada znamo i jednostavnije:

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x + y}{x + 2y}.$$

□

Zadatak 3.27. *Neka je funkcija* $z = f(x, y)$ *dana implicitno formulom* $F(z, x, y) = x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$. *Odredite parcijalne derivacije funkcije* z.

Rješenje.

$$\begin{aligned} z_x &= -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2x}{6z - y} \\ z_y &= -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{-4y - z + 1}{6z - y} \end{aligned}$$

□

Zadatak 3.28. *Dana je ovisnost količine proizvodnje, rada i kapitala:*

$$Q^3 - LC = 0.$$

Odredite graničnu produktivnost kapitala $(\frac{\partial Q}{\partial C})$, *graničnu produktivnost rada* $(\frac{\partial Q}{\partial L})$, *te graničnu stopu tehničke supstitucije kapitala radom* $(\frac{\partial C}{\partial L})$.

Rješenje.

$$F(Q, L, C) = Q^3 - LC$$

$$\frac{\partial Q}{\partial C} = Q_C = -\frac{F_C}{F_Q} = -\frac{-L}{3Q^2} = \frac{L}{3Q^2}$$

(kada $C \uparrow 1$ jedinicu $\Rightarrow Q \uparrow \frac{L}{3Q^2}$ jedinica),

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = Q_L = -\frac{F_L}{F_Q} = -\frac{-C}{3Q^2} = \frac{C}{3Q^2}$$

(kada $L \uparrow 1$ jedinicu $\Rightarrow Q \uparrow \frac{C}{3Q^2}$ jedinica),

$$\frac{\partial C}{\partial L} = C_L = -\frac{F_L}{F_C} = -\frac{-C}{-L} = -\frac{C}{L}$$

(kada $L \uparrow 1$ jedinicu $\Rightarrow C \downarrow \frac{C}{L}$ jedinica).

Napomena (2. način):
Ovdje smo mogli i izlučiti svaku pojedinu varijablu, pa onda derivirati:

$$\begin{aligned} \text{npr. } Q^3 &= LC \\ Q &= \sqrt[3]{LC} = (LC)^{\frac{1}{3}} \\ \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial C} &= Q_C = \frac{1}{3}(LC)^{-\frac{2}{3}} \cdot L = \frac{L}{3\sqrt[3]{(LC)^2}} = \frac{L}{3Q^2}. \end{aligned}$$

No, to nije uvijek moguće, a i račun je kompliciraniji od 1. načina. □

Zadatak 3.29. *Na nivou proizvodnje $Q = 10$, rad i kapital su povezani relacijom:*

$$L^{0.3}C^{0.7} = 10.$$

Odredite graničnu stopu tehničke supstitucije kapitala radom i interpretirajte.

Rješenje.
$F(L, C) = L^{0.3}C^{0.7} - 10 = 0$

$$\frac{\partial C}{\partial L} = C_L = -\frac{F_L}{F_C} = -\frac{C^{0.7} \cdot 0.3L^{-0.7}}{L^{0.3} \cdot 0.7C^{-0.3}} = -\frac{C^{0.7} \cdot 0.3 \cdot C^{0.3}}{L^{0.3} \cdot 0.7 \cdot L^{0.7}} = -\frac{0.3C}{0.7L}$$

Interpretacija: $L \uparrow 1$ jedinicu $\Rightarrow C \downarrow \frac{0.3C}{0.7L}$ jedinica da bi se odrala ista razina proizvodnje.
Npr. na nivou $L = 10$, $C = 10$, ako L povećamo za 1 jedinicu, C se smanji za $\frac{3}{7}$ jedinica. Tada je $L = 10 + 1 = 11$, $C = 10 - \frac{3}{7} = 9\frac{4}{7}$. □

3.7 Parcijalne derivacije višeg reda

Teorem 3.30 (Youngov ili Schwarzov teorem).
Pretpostavimo da su "mješovite" parcijalne derivacije drugog reda $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *i* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ *funkcije* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *obje neprekidne na otvorenom skupu* S*. Tada su te dvije parcijalne derivacije jednake u svim točkama skupa* S*. Drugim riječima,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i},$$

ako su te obje parcijalne derivacije neprekidne.

Zadatak 3.31. *Za funkciju* $f(x, y, z) = zy^x$ *izračunajte*

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}.$$

Rješenje.

$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = zy^x \ln y$

$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = zxy^{x-1}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = zx(x-1)y^{x-2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx} = zxy^{x-1} \ln y + zy^x \frac{1}{y} = zxy^{x-1} \ln y + zy^{x-1}$

$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial f}{\partial y \partial x \partial z} = f_{xyz} = xy^{x-1} \ln y + y^{x-1}$ □

3.8 Ekstremi funkcija dviju varijabli

Postupak za određivanje ekstrema funkcije dvije varijable je sljedeći:

1. Odredimo stacionarne točke. To su točke koje su rješenja sustava jednadžbi:

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x^*, y^*) \text{ stacionarne točke}$$

2. Računamo funkcije:

$$D_1 = f_{xx}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

Napomena: Matrica $\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$ naziva se **Hesseova matrica** funkcije f, a njena determinanta, koju smo mi označili s D_2 naziva se **Hesijan**.

3. Za svaku stacionarnu točku provjeravamo njen karakter:

- Ukoliko je $D_1(x^*, y^*) > 0$ i $D_2(x^*, y^*) > 0 \Rightarrow (x^*, y^*)$ je točka **lokalnog minimuma**.
- Ukoliko je $D_1(x^*, y^*) < 0$ i $D_2(x^*, y^*) > 0 \Rightarrow (x^*, y^*)$ je točka **lokalnog maksimuma**.
- Ukoliko je $D_2(x^*, y^*) < 0 \Rightarrow (x^*, y^*)$ nije ekstrem, nego **sedlasta točka**.
- Ukoliko je $D_2(x^*, y^*) = 0 \Rightarrow$ za određivanje karaktera točke (x^*, y^*) potrebno je provesti daljnja ispitivanja; (x^*, y^*) može biti točka lokalnog maksimuma, točka lokalnog minimuma, ili sedlasta točka.

Zadatak 3.32. *Odredite ekstreme funkcije* $f(x, y) = 80 - y^2 + x^3 + 12y - 3x$.

Rješenje.

Domena: $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$
$f_x = 3x^2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1, \ x_2 = 1$
$f_y = -2y + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 6$

$$\Rightarrow \quad T_1(1, 6) \text{ i } T_2(-1, 6) \text{ su stacionarne točke}$$

$$\begin{array}{l} f_{xx} = 6x \\ f_{xy} = 0 \\ f_{yy} = -2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} D_1 = 6x \\ D_2 = 6x \cdot (-2) - 0 = -12x \end{array}$$

$$T_1(1, 6) \quad \Rightarrow \quad \left. \begin{array}{l} D_1(1, 6) = 6 > 0 \\ D_2(1, 6) = -12 < 0 \end{array} \right\} T_1(1, 6) \text{ je sedlasta točka}$$

$$T_2(-1, 6) \quad \Rightarrow \quad \left. \begin{array}{l} D_1(-1, 6) = -6 < 0 \\ D_2(-1, 6) = 12 > 0 \end{array} \right\} T_2(-1, 6) \text{ je točka lokalnog}$$

maksimuma.

$$f(-1,6) = 118 \quad \Rightarrow \quad M(-1,6;118)$$

□

Zadatak 3.33. *Odredite ekstreme funkcije*

$$u(x,y) = 3\ln\frac{x}{6} + 2\ln y + \ln(12-x-y).$$

Rješenje.

$$\text{Domena:} \qquad x,y>0,\ 12-x-y>0$$

$$\Rightarrow 12 > x+y \ \text{ tj. } \ x+y<12$$

$$u_x = 3\cdot\tfrac{1}{\frac{x}{6}}\cdot\tfrac{1}{6} + 0 + \tfrac{1}{12-x-y}\cdot(-1) = \tfrac{3}{x} - \tfrac{1}{12-x-y} = \tfrac{-4x-3y+36}{x(12-x-y)} = 0$$

$$u_y = 2\cdot\tfrac{1}{y} + \tfrac{1}{12-x-y}\cdot(-1) = \tfrac{2}{y} - \tfrac{1}{12-x-y} = \tfrac{-2x-3y+24}{y(12-x-y)} = 0$$

$$\begin{array}{rcl} -4x-3y+36 &=& 0 \\ -2x-3y+24 &=& 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} 4x+3y &=& 36/_{II\,\cdot\,(-1)\,+\,I} \\ 2x+3y &=& 24 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad 2x=12 \quad \Rightarrow \quad x=6, y=4 \quad \Rightarrow \quad T(6,4) \text{ je stacionarna točka}$$

$$u_{xx} = \tfrac{-3}{x^2} - \tfrac{1}{(12-x-y)^2} \quad \Rightarrow \quad u_{xx}(6,4) = -\tfrac{3}{36} - \tfrac{1}{4} = -\tfrac{1}{3}$$

$$u_{xy} = -\tfrac{1}{(12-x-y)^2} \quad \Rightarrow \quad u_{xy}(6,4) = -\tfrac{1}{4}$$

$$u_{yy} = \tfrac{-2}{y^2} - \tfrac{1}{(12-x-y)^2} \quad \Rightarrow \quad u_{yy}(6,4) = -\tfrac{2}{16} - \tfrac{1}{4} = -\tfrac{3}{8}$$

$$\begin{aligned} D_1(6,4) &= u_{xx}(6,4) = -\frac{1}{3} < 0 \\ D_2(6,4) &= u_{xx}(6,4)\cdot u_{yy}(6,4) - [u_{xy}(6,4)]^2 \\ &= -\frac{1}{3}\cdot(-\frac{3}{8}) - (-\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16} > 0 \end{aligned}$$

$$u(6,4) = 3\ln 2 \quad \Rightarrow \quad M(6,4;3\ln 2) \text{ je maksimum.}$$

□

Zadatak 3.34. *Odredite ekstreme funkcije* $z(x,y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y.$

Rješenje.

Domena: $x \neq 0,\, y \neq 0$

$$z_x = -\tfrac{8}{x^2} + \tfrac{1}{y} = \tfrac{-8y+x^2}{x^2y} = 0 \quad \Rightarrow \quad -8y + x^2 = 0$$

$$z_y = -\tfrac{x}{y^2} + 1 = \tfrac{-x+y^2}{y^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad -x + y^2 = 0$$

$$\begin{aligned} &-8y + x^2 = 0 \\ &-x + y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y^2 \quad \Rightarrow \quad && y^4 - 8y = 0 \\ &&& y(y^3 - 8) = 0 \\ &&& y_1 \neq 0, \quad y_2 = 2 \\ &&& x = 4 \end{aligned}$$

$T(4,2)$ je stacionarna točka

$$z_{xx} = \tfrac{16}{x^3} \quad \Rightarrow \quad z_{xx}(4,2) = \tfrac{16}{4^3} = \tfrac{1}{4}$$

$$z_{xy} = -\tfrac{1}{y^2} \quad \Rightarrow \quad z_{xy}(4,2) = -\tfrac{1}{2^2} = -\tfrac{1}{4}$$

$$z_{yy} = \tfrac{2x}{y^3} \quad \Rightarrow \quad z_{yy}(4,2) = \tfrac{2\cdot 4}{2^3} = 1$$

$$\begin{aligned} D_1(4,2) &= z_{xx}(4,2) = \frac{1}{4} > 0 \\ D_2(4,2) &= z_{xx}(4,2) \cdot z_{yy}(4,2) - [z_{xy}(4,2)]^2 \\ &= \frac{1}{4} \cdot 1 - (-\frac{1}{4})^2 = \frac{3}{16} > 0 \end{aligned}$$

$z(4,2) = 6 \quad \Rightarrow \quad m(4,2;6)$ je minimum.

□

Zadatak 3.35. *Dane su cijene dvaju dobara u ovisnosti o količinama proizvodnje* $p_1 = 15 - Q_1$ *i* $p_2 = 10 - Q_2$*, te funkcija ukupnih troškova* $T(Q_1, Q_2) = 5Q_1 + 4Q_2 + 5$*. Nađite optimalnu kombinaciju proizvodnje u cilju maksimiziranja dobiti. Koliko ona iznosi?*

Rješenje.

PRIHODI:

$$\begin{aligned} P(Q_1,Q_2) &= p_1Q_1 + p_2Q_2 \\ &= (15 - Q_1)Q_1 + (10 - Q_2)Q_2 \\ &= 15Q_1 - Q_1^2 + 10Q_2 - Q_2^2 \end{aligned}$$

TROŠKOVI:

$$T(Q_1, Q_2) = 5Q_1 + 4Q_2 + 5$$

DOBIT:

$$\begin{aligned} D(Q_1, Q_2) &= P(Q_1, Q_2) - T(Q_1, Q_2) \\ &= 15Q_1 - Q_1^2 + 10Q_2 - Q_2^2 - 5Q_1 - 4Q_2 - 5 \\ &= -Q_1^2 - Q_2^2 + 10Q_1 + 6Q_2 - 5 \end{aligned}$$

Tražimo maksimum dobiti.

$D_{Q_1} = -2Q_1 + 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_1 = 5$

$D_{Q_2} = -2Q_2 + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_2 = 3$

$$(Q_1, Q_2) = (5, 3) \text{ je stacionarna točka}$$

$$\begin{aligned} &D_{Q_1Q_1} = -2 \\ &D_{Q_1,Q_2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} &D_1(5,3) = -2 < 0 \\ &D_2(5,3) = -2 \cdot (-2) - 0^2 = 4 > 0 \end{aligned} \\ &D_{Q_2,Q_2} = -2 \end{aligned}$$

$$D(5, 3) = 29 \quad \Rightarrow \quad M(5, 3; 29) \text{ je maksimum.}$$

Maksimalna dobit se ostvaruje na razini proizvodnje $Q_1 = 5$, $Q_2 = 3$ i iznosi 79. □

DZ 3.36. *Zadana je funkcija ukupnih troškova za dva proizvoda* $T(Q_1, Q_2) = Q_1^2 + 3Q_2^2 + Q_1Q_2 + 10$ *i prodajne cijene* $p_1 = 7$, $p_2 = 20$. *Ispitajte uz koju se količinu* Q_1 *i* Q_2 *ostvaruje maksimum dobiti i koliko ona iznosi.*

Rješenje.
Maksimum dobiti se postiže na razini proizvodnje $Q_1 = 2$, $Q_2 = 3$. □

DZ 3.37. *Odredite ekstreme funkcije* $z(x, y) = \frac{x^2+y^2-1}{x}$.

Rješenje.
Ekstremi ne postoje (nema stacionarnih točaka). □

3.9 Ekstremi funkcija dviju varijabli s ograničenjem

Pretpostavimo da su $f(x,y)$ i $g(x,y)$ realne funkcije dviju varijabli. Cilj nam je pronaći ekstreme funkcije $f(x,y)$ na skupu točaka (x,y) koje zadovoljavaju jednadžbu $g(x,y)=0$. Drugim riječima, rješavamo problem:

$$f(x,y) \to \text{min, max}$$

$$\text{uz ograničenje:} \qquad g(x,y)=0.$$

3.9.1 Metoda supstitucije

Uputa:
Ukoliko je moguće, iz uvjeta izrazimo jednu varijablu preko druge i to uvrstimo u funkciju čije ekstreme tražimo. Na taj način problem ekstrema funkcije dviju varijabli s ograničenjem svodimo na problem ekstrema funkcije jedne varijable bez ograničenja.

Zadatak 3.38. *Nađite ekstremne vrijednosti funkcije* $z(x,y)=e^{x\cdot y}$ *uz ograničenje* $x+y=4$.

Rješenje.
$z(x,y)=e^{x\cdot y}$
$x+y=4 \quad \Rightarrow \quad y=4-x$
Sada supstitucijom varijable y u funkciji $z(x,y)$ dobivamo:

$$z(x,y)=z(x)=e^{x(4-x)}=e^{4x-x^2}$$

$z'(x)=e^{4x-x^2}(4-2x)=0 \quad \Rightarrow \quad x=2$ je stacionarna točka
$z''(x)=e^{4x-x^2}(4-2x)^2+e^{4x-x^2}\cdot(-2)$
$z''(2)=-2e^4<0, \quad z(2)=e^4, \quad y=4-2=2$

$$\Rightarrow M(2,2;e^4) \text{ je lokalni maksimum.}$$

□

Zadatak 3.39. *Neka je cijena jedinice rada 1, jedinice kapitala 2, a fiksni troškovi 10. Ako je dana funkcija proizvodnje* $Q(L,C)=0.5(\sqrt{L}+\sqrt{C})^2$, *nađite optimalnu kombinaciju rada i kapitala u cilju minimizacije troškova, a na nivou proizvodnje* $Q=8$. *Koliki su ti minimalni troškovi?*

Rješenje.

$T(L,C) = 1 \cdot L + 2 \cdot C + 10 = L + 2C + 10 \to \min$

$Q(L,C) = 0.5(\sqrt{L} + \sqrt{C})^2 = 8 \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{L} + \sqrt{C})^2 = 16/\sqrt{\ }$

$$\begin{aligned} \sqrt{L} + \sqrt{C} &= 4 \\ \sqrt{L} &= 4 - \sqrt{C}/()^2 \\ L &= (4 - \sqrt{C})^2 \end{aligned}$$

Supstitucijom varijable L funkcija ukupnih troškova prelazi u

$$T(L,C) = T(C) = (4 - \sqrt{C})^2 + 2C + 10$$

$T'(C) = 2(4 - \sqrt{C}) \cdot (-\frac{1}{2\sqrt{2}}) + 2 = 0$

$$\Rightarrow \quad -\tfrac{4}{\sqrt{C}} + 1 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{4}{\sqrt{C}} = 3 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{C} = \tfrac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{16}{9} \text{ je stacionarna točka}$$

$$\Rightarrow \quad L = (4 - \sqrt{\frac{16}{9}})^2 = (\frac{8}{3})^2 = \frac{64}{9}$$

$T''(C) = (-4C^{-\frac{1}{2}} + 3)' = -4 \cdot (-\frac{1}{2})C^{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{C^{\frac{3}{2}}}$

$\Rightarrow \quad T''(\frac{16}{9}) > 0 \quad \Rightarrow \min, \quad T(\frac{16}{9}) = \frac{186}{9}$

$$m(\frac{16}{9}, \frac{64}{9}; \frac{186}{9}) \text{ je lokalni minimum.}$$

□

Zadatak 3.40. *Dana je funkcija troškova $T(L,C) = 2L + C + 10$ i funkcija proizvodnje $Q(L,C) = L \cdot C$ u ovisnosti o radu i kapitalu. Nađite kombinaciju rada i kapitala uz koju se na nivou proizvodnje $Q = 8$ ostvaruju minimalni troškovi.*

Rješenje.

$T(L,C) = 2L + C + 10$

$Q(L,C) = L \cdot C = 8 \quad \Rightarrow \quad L = \frac{8}{C}$

$$T(L,C) = T(C) = \frac{16}{C} + C + 10$$

$T'(C) = -\frac{16}{C^2} + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad (C > 0) \quad C = 4 \quad$ je stac. točka

$$\Rightarrow \quad L = \frac{8}{4} = 2$$

$T''(C) = \frac{32}{C^3} \Rightarrow \quad T''(4) = \frac{32}{4^3} > 0 \quad \Rightarrow \text{min}, \quad T(4) = 18$

$$m(2,4;18) \text{ je lokalni minimum.}$$

□

3.9.2 Metoda Lagrangeovih multiplikatora

Problem

$$f(x,y) \to \text{min, max}$$

$$\text{uz ograničenje:} \quad g(x,y) = 0.$$

moguće je u većini slučajeva (pa i onda kada ne možemo primijeniti metodu supstitucije) riješiti metodom Lagrangeovih multiplikatora:

1. Definiramo Lagrangeovu funkciju

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

2. Odredimo stacionarne točke Lagrangeove funkcije, tj. točke koje su rješenja sustava jednadžbi:

$$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow (x^*, y^*, \lambda^*) \text{ stacionarne točke}$$

3. Računamo sve parcijalne derivacije drugog reda Lagrangeove funkcije:

$$L_{xx}, L_{xy}, L_{x\lambda}, L_{yy}, L_{y\lambda}, L_{\lambda\lambda},$$

a potom determinantu $D = \begin{vmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{x\lambda} \\ L_{yx} & L_{yy} & L_{y\lambda} \\ L_{\lambda x} & L_{\lambda y} & L_{\lambda\lambda} \end{vmatrix}$.

4. Za svaku stacionarnu točku provjeravamo njen karakter:

   - Ako je $D(x^*, y^*, \lambda^*) < 0 \Rightarrow (x^*, y^*)$ je točka **lokalnog minimuma**.
   - Ako je $D(x^*, y^*, \lambda^*) > 0 \Rightarrow (x^*, y^*)$ je točka **lokalnog maksimuma**.

Zadatak 3.41. *Odredite ekstreme funkcije* $f(x,y) = 4y$ *uz ograničenje* $(x-5)^2 + 9(y-4)^2 = 9$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 4y \\ g(x,y) &= 9-(x-5)^2-9(y-4)^2 \\ \Rightarrow \quad L(x,y,\lambda) &= 4y+\lambda(9-(x-5)^2-9(y-4)^2) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll} L_x = -2\lambda(x-5) = 0 & \Rightarrow \ \lambda(x-5)=0, \lambda \neq 0 \quad \Rightarrow & x=5 \\ L_y = 4-18(y-4)\lambda = 0 & \Rightarrow \ \lambda = \frac{4}{18(y-4)} \neq 0 & \\ L_\lambda = 9-(x-5)^2-9(y-4)^2 = 0 & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} x=5 \quad \Rightarrow \quad 9-9(y-4)^2 &= 0 \\ (y-4)^2 &= 1 \\ y-4 &= \pm 1 \\ y_1 = 3, \quad y_2 &= 5 \end{aligned}$$

Dobivamo dvije stacionarne točke: $\begin{array}{lll} T_1(5,3) & \Rightarrow & \lambda_1 = \frac{4}{18(3-4)} = -\frac{2}{9} \\ T_2(5,5) & \Rightarrow & \lambda_2 = \frac{4}{18(5-4)} = \frac{2}{9} \end{array}$

$$\begin{array}{lll} L_{xx} = -2\lambda & L_{xy} = 0 & L_{x\lambda} = -2(x-5) \\ L_{yy} = -18\lambda & L_{y\lambda} = -18(y-4) & L_{\lambda\lambda} = 0 \end{array}$$

$T_1(5,3), \quad \lambda_1 = -\frac{2}{9}$:

$$D = \begin{vmatrix} -2\lambda & 0 & -2(x-5) \\ 0 & -18\lambda & -18(y-4) \\ -2(x-5) & -18(y-4) & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{4}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 18 \\ 0 & 18 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{4}{9} \cdot (0-18^2) < 0 \quad \Rightarrow \text{ lok. minimum}$$

$$f(5,3) = 4 \cdot 3 = 12 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m(5,3;12)}$$

$T_2(5,5), \quad \lambda_2 = \frac{2}{9}$:

$$D = \begin{vmatrix} -2\lambda & 0 & -2(x-5) \\ 0 & -18\lambda & -18(y-4) \\ -2(x-5) & -18(y-4) & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{4}{9} & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -18 \\ 0 & -18 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{4}{9} \cdot (0-(-18)^2) > 0 \quad \Rightarrow \text{ lok. maksimum}$$

$$f(5,5) = 4 \cdot 5 = 20 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M(5,5;20)}$$

□

Zadatak 3.42. *Odredite ekstreme funkcije* $f(x,y) = -x - y$ *uz ograničenje* $x^2 + y^2 = 2$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 4y \\ g(x,y) &= 2 - x^2 - y^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad L(x,y,\lambda) = -x - y + \lambda(2 - x^2 - y^2)$$

$$\left.\begin{aligned} L_x &= -1 - 2\lambda x = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\tfrac{1}{2x} \\ L_y &= -1 - 2\lambda y = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\tfrac{1}{2y} \end{aligned}\right\} -\frac{1}{2x} = -\frac{1}{2y} \quad \Rightarrow \quad x = y$$

$$L_\lambda = 2 - x^2 - y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 - x^2 - x^2 = 0$$

$$\begin{aligned} 2x^2 &= 2 \\ x^2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x_1 = -1, \quad x_2 = 1 \\ &y_1 = -1, \quad y_2 = 1 \\ &\lambda_1 = \tfrac{1}{2}, \quad\ \lambda_2 = -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Dobili smo dvije stacionarne točke: $\begin{aligned} &T_1(-1,-1), \quad \lambda_1 = \tfrac{1}{2} \\ &T_2(1,1), \quad \lambda_2 = -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$

$$\begin{aligned} &L_{xx} = -2\lambda \quad L_{xy} = 0 \qquad L_{x\lambda} = -2x \\ &L_{yy} = -2\lambda \quad L_{y\lambda} = -2y \quad L_{\lambda\lambda} = 0 \end{aligned}$$

$T_1(-1,-1), \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}$:

$$D = \begin{vmatrix} -2\lambda & 0 & -2x \\ 0 & -2\lambda & -2y \\ -2x & -2y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}_{I \cdot 2 + III} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-4 - 4) > 0 \quad \Rightarrow \text{ lok. maksimum}$$

$$f(-1,-1) = 1 + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad \textbf{M(-1,-1;2)}$$

$T_2(1,1), \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}:$

$$D = \begin{vmatrix} -2\lambda & 0 & -2x \\ 0 & -2\lambda & -2y \\ -2x & -2y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix}_{I \cdot 2 + III} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4-4) < 0 \quad \Rightarrow \text{lok. minimum}$$

$$f(1,1) = -1 - 1 = -2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m(1,1;\text{-}2)}$$

□

Zadatak 3.43. *Dana je funkcija troškova* $T(Q_1, Q_2) = 2Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2$ *gdje su* $Q_1, Q_2 \geq 0$ *količine proizvodnje za dva proizvoda. Odredite* Q_1 *i* Q_2 *tako da troškovi budu minimalni, a da ukupna proizvodnja bude 20.*

Rješenje.
Problem glasi:

$$T(Q_1, Q_2) = 2Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2 \rightarrow \min$$

$$\text{uz ograničenje} \qquad Q_1 + Q_2 = 20$$

I. Metoda supstitucije:

$$Q_2 = 20 - Q_1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad T(Q_1, Q_2) = T(Q_1) &= 2Q_1^2 + Q_1(20 - Q_1) + (20 - Q_1)^2 \\ &= 2Q_1^2 - 20Q_1 + 400 \\ T'(Q_1) &= 4Q_1 - 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_1 = 5 \\ T''(Q_1) &= 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad T''(5) = 4 > 0 \quad \Rightarrow \text{lok. min.} \end{aligned}$$

$$Q_2 = 20 - 5 = 15, \quad T(5, 15) = 350 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m(5,15;350)}$$

II. Metoda Lagrangeovih multiplikatora:

$$L(Q_1, Q_2, \lambda) = 2Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2 + \lambda(20 - Q_1 - Q_2)$$

$$\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} L_{Q_1} &= 4Q_1 + Q_2 - \lambda = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 4Q_1 + Q_2 \\ L_{Q_2} &= Q_1 + 2Q_2 - \lambda = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = Q_1 + 2Q_2 \end{aligned}\right\} Q_2 = 3Q_1 \\ &L_\lambda = 20 - Q_1 - Q_2 = 0 \;\Rightarrow\; 20 - Q_1 - 3Q_1 = 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
20-4Q_1=0 \quad \Rightarrow \quad Q_1 &= 5\\
Q_2 &= 15\\
\lambda &= 35
\end{aligned}
$$

Dobili smo stacionarnu točku: $T(5,15), \quad \lambda = 35$

$$
\begin{array}{lll}
L_{Q_1Q_1} = 4 & L_{Q_1Q_2} = -1 & L_{Q_1\lambda} = -1\\
L_{Q_2Q_2} = 2 & L_{Q_2\lambda} = -1 & L_{\lambda\lambda} = 0
\end{array}
$$

$T(5,15), \quad \lambda = 35:$

$$
D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}_{I\cdot(-1)+II} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1\\ -3 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =
$$

$$
= (-1)\cdot(-1)^{3+3}\cdot(3+1) = -4 < 0 \quad \Rightarrow \text{ lok. minimum}
$$

$$
f(5,15) = 350 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m(5,15;350)}
$$

Interpretacija Lagrangeovog multiplikatora $\lambda = 35$:
Ako ukupnu količinu proizvodnje povećamo za jednu (beskonačno malu) jedinicu, ukupni troškovi će se povećati za 35 jedinica.

□

Zadatak 3.44. *Potrošačeva funkcija korisnosti za dva dobra je* $u(x_1,x_2) = 2x_1x_2+2x_1+x_2$. *Ako je cijena prvog dobra 2, a drugog 1, nađite maksimalnu korisnost uz budžet 8.*

Rješenje.
Problem glasi:

$$
u(x_1,x_2) = 2x_1x_2 + 2x_1 + x_2 \to \max
$$

$$
\text{uz ograničenje} \qquad 2x_1 + 1x_2 = 8
$$

I. Metoda supstitucije:

$$
x_2 = 8 - 2x_1
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad u(x_1,x_2) = u(x_1) &= 2x_1(8-2x_1) + 2x_1 + 8 - 2x_1\\
&= -4x_1^2 + 16x_1 + 8\\
u'(x_1) &= -8x_1 + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2\\
u''(x_1) &= -8 < 0 \quad \Rightarrow \quad u''(2) = -8 < 0 \quad \Rightarrow \text{lok. maks.}
\end{aligned}
$$

$$
x_2 = 8 - 2\cdot 2 = 4, \quad u(2,4) = 24 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M(2,4;24)}
$$

II. Metoda Lagrangeovih multiplikatora:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 2x_1x_2 + 2x_1 + x_2 + \lambda(8 - 2x_1 - x_2)$$

$$\left.\begin{array}{ll} L_{x_1} = 2x_2 + 2 - 2\lambda = 0 & \Rightarrow \ \lambda = x_2 + 1 \\ L_{x_2} = 2x_1 + 1 - \lambda = 0 & \Rightarrow \ \lambda = 2x_1 + 1 \end{array}\right\} x_2 = 2x_1$$
$$L_\lambda = 8 - 2x_1 - x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 8 - 2x_1 - 2x_1 = 0$$

$$8 - 4x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 4 \\ \lambda &= 5 \end{aligned}$$

Dobili smo stacionarnu točku: $T(2, 4), \quad \lambda = 5$

$$\begin{array}{lll} L_{x_1x_1} = 0 & L_{x_1x_2} = 2 & L_{x_1\lambda} = -2 \\ L_{x_2x_2} = 0 & L_{x_2\lambda} = -1 & L_{\lambda\lambda} = 0 \end{array}$$

$T(2, 4), \quad \lambda = 5:$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}_{II+III} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$
$$= 2 \cdot (-1)^{2+1} \cdot (0 - 1) = 2 > 0 \quad \Rightarrow \text{lok. maksimum}$$

$$f(2, 4) = 24 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M(2,4;24)}$$

Interpretacija Lagrangeovog multiplikatora $\lambda = 5$:
Ako budžet povećamo za jednu (beskonačno malu) jedinicu, korisnost će se povećati za 5 jedinica.

□

Poglavlje 4

INTEGRALI

4.1 Neodređeni integral

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + c \quad \Leftrightarrow \quad F'(x) = f(x)}$$

Napomena: Funkciju F zovemo *primitivnom funkcijom* funkcije f.

PRAVILA INTEGRIRANJA:

1. $\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx, \quad c$ – konstanta,
2. $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$

TABLICA NEODREĐENIH INTEGRALA:

$$\int x^n\,dx = \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, & n \neq -1; \\ \ln|x| + c, & n = -1. \end{cases}$$

$$\int dx = x + c$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$$

Izračunajte neodređene integrale:

Zadatak 4.1.

$$\begin{aligned}\int (x^3 - 5x^4 + x - 1)\,dx &= \int x^3\,dx - 5\int x^4\,dx + \int x\,dx - 1\int dx = \\ &= \frac{x^4}{4} - \cancel{5}\cdot\frac{x^5}{\cancel{5}} + \frac{x^2}{2} - x + c = \\ &= \frac{x^4}{4} - x^5 + \frac{x^2}{2} - x + c.\end{aligned}$$

Zadatak 4.2.

$$\begin{aligned}\int (x\sqrt[3]{x} - \frac{x}{\sqrt{x}})\,dx &= \int (x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{1}{2}})\,dx = \\ &= \frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \\ &= \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{3}{7}x^2\sqrt[3]{x} - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c.\end{aligned}$$

Zadatak 4.3.

$$\begin{aligned}\int \frac{(x+1)^2}{2\sqrt{x}}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{x^2+2x+1}{\sqrt{x}}\,dx = \\ &= \frac{1}{2}\int (x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})\,dx = \\ &= \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{\cancel{2}}} + \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}} + c = \\ &= \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} + c = \\ &= \frac{1}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \sqrt{x} + c.\end{aligned}$$

Zadatak 4.4.

$$\int 4^x 5^{-x}\,dx = \int \left(\frac{4}{5}\right)^x\,dx = \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^x}{\ln\frac{4}{5}} + c.$$

Zadatak 4.5.

$$\begin{aligned}\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}\,dx &= \int \frac{2\cdot 2^x - \frac{1}{5}\cdot 5^x}{2^x\cdot 5^x}\,dx = \\ &= \int \left(\frac{2}{5^x} - \frac{\frac{1}{5}}{2^x}\right)dx = 2\cdot\int\left(\frac{1}{5}\right)^x dx - \frac{1}{5}\cdot\int\left(\frac{1}{2}\right)^x dx = \\ &= 2\cdot\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^x}{\ln\frac{1}{5}} - \frac{1}{5}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\frac{1}{2}} + c = -\frac{2}{\ln 5}\left(\frac{1}{5}\right)^x + \frac{1}{5\ln 2}\left(\frac{1}{2}\right)^x + c.\end{aligned}$$

DZ 4.6.

$$\int \frac{3^{x-1}-4^{x+2}}{12^x}\,dx$$

Zadatak 4.7.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{7x^2-8} = \int \frac{dx}{7\cdot\left(x^2-\frac{8}{7}\right)} = \frac{1}{7}\cdot\int\frac{dx}{x^2-\left(\sqrt{\frac{8}{7}}\right)^2} = \\ = \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{8}{7}}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{\frac{8}{7}}}{x+\sqrt{\frac{8}{7}}}\right| + c.\end{aligned}$$

Zadatak 4.8.

$$\int \frac{x^2+1}{x}\,dx = \int\left(x+\frac{1}{x}\right)dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + c.$$

Zadatak 4.9.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+3}{x^2-2}\,dx &= \int \frac{(x^2-2)+5}{x^2-2}\,dx = \int\left(1+\frac{5}{x^2-2}\right)dx = \\ &= \int dx + 5\cdot\int\frac{dx}{x^2-(\sqrt{2})^2} = x + 5\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| + c.\end{aligned}$$

Zadatak 4.10.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+x^2+2x+3}{x^2+2}\,dx = (\diamondsuit) = \int\left(x+1+\frac{1}{x^2+2}\right)dx &= \\ = \int x\,dx + \int dx + \int \frac{dx}{x^2+(\sqrt{2})^2} &= \\ = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + c.\end{aligned}$$

($\diamondsuit$) Dijelimo polinome:

$$\begin{array}{ccccccccccc} (x^3 & + & x^2 & + & 2x & + & 3) & : & (x^2+2) & = & x+1 \\ \pm x^3 & & & \pm & 2x & & & & & & \\ \cline{1-7} & & x^2 & & & + & 3 & & & & \\ & \pm & x^2 & & & \pm & 2 & & & & \\ \cline{1-7} & & & & & & 1 & & & & \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3+x^2+2x+3}{x^2+2} = x+1+\frac{1}{x^2+2}$$

4.2 Integriranje supstitucijom

Općenito, ako želimo integrirati racionalnu funkciju oblika

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx,$$

pri čemu su P_n i Q_m redom polinomi stupnja n, odnosno m,
provodimo sljedeći postupak:

- $n > m \;\Rightarrow$ dijelimo brojnik sa nazivnikom (pr. Zadatak 4.10.),
- $n = m \;\Rightarrow$ nadopunjavamo brojnik do nazivnika (pr. Zadatak 4.9.),
- $n < m \;\Rightarrow$ supstitucija (ako integral nije tablični!).

Zadatak 4.11.

$$\int \frac{2x-2}{x^2-2x+9}\,dx = (m>n) = \left| \begin{array}{l} \textit{supstitucija:} \\ t = x^2-2x+9 \\ \frac{dt}{dx} = 2x-2 \\ dt = (2x-2)dx \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|x^2-2x+9| + c.$$

Supstitucija je, osim za integriranje racionalnih funkcija, korisna i u mnogim drugim slučajevima:

Zadatak 4.12.

$$\int \frac{4x-12}{\sqrt{x^2-6x}}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2-6x \\ dt = (2x-6)dx \end{array} \right| =$$

$$= 2\cdot\int \frac{2x-6}{\sqrt{x^2-6x}} = 2\cdot\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt =$$

$$= 2\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 4\sqrt{t} + c = 4\sqrt{x^2-6x} + c.$$

DZ 4.13.

$$\int \frac{6x^2-4x}{x^3-x^2+1}\,dx$$

DZ 4.14.

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{6x^2+6}}\,dx$$

Zadatak 4.15.

$$\int (3x^2+3)^{-\frac{4}{5}}\cdot x\,dx = \left| \begin{array}{l} t = 3x^2+3 \\ dt = 6x\,dx \\ x\,dx = \frac{dt}{6} \end{array} \right| =$$

$$= \int t^{-\frac{4}{5}}\cdot\frac{1}{6}\,dt = \frac{1}{6}\cdot\frac{t^{\frac{1}{5}}}{\frac{1}{5}} + c =$$

$$= \frac{5}{6}\sqrt[5]{t} + c = \frac{5}{6}\sqrt[5]{3x^2+3} + c.$$

Zadatak 4.16.

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx = \left| \begin{array}{l} t^2 = x-1 \;\Rightarrow\; x = t^2+1 \\ \frac{dx}{dt} = 2t \;\Rightarrow\; 2t\,dt = dx \end{array} \right| =$$

$$= \int (t^2+1)\sqrt{t^2}\cdot 2t\,dt = 2\int (t^2+1)t^2\,dt =$$

$$=2\int (t^4+t^2)\,dt = 2\cdot\left(\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right)+c =$$

$$=\frac{2}{5}(\sqrt{x-1})^5+\frac{2}{3}(\sqrt{x-1})^3+c.$$

Zadatak 4.17.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx = \left| \begin{array}{l} t^2 = x \\ 2t\,dt = dx \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{t}{t+1}\cdot 2t\,dt = 2\int \frac{t^2}{t+1}\,dt =$$

$$= \left| \begin{array}{cccccl} t^2 & & & & & : \; (t+1) \; = \; t-1+\frac{1}{t+1} \\ \pm t^2 & \pm & t & & & \\ \hline & - & t & & & \\ & \mp & t & \mp & 1 & \\ \hline & & & & 1 & \end{array} \right| =$$

$$= 2\cdot\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)\,dt = \cancel{2}\frac{t^2}{\cancel{2}} - 2t + 2\int\frac{dt}{t+1} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t+1 = u \\ dt = du \end{array} \right| = t^2 - 2t + 2\int \frac{du}{u} =$$

$$= x - 2\sqrt{x} + 2\ln|u| + c = x - 2\sqrt{x} + 2\ln(\sqrt{x}+1) + c.$$

DZ 4.18.

$$\int x^2\sqrt{2x-2}$$

DZ 4.19.

$$\int \frac{3^{\sqrt{x}}}{3\sqrt{x}}\,dx$$

Zadatak 4.20.

$$\int 3x \cdot e^{x^2}\,dx = \left|\begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x\,dx \\ x\,dx = \frac{dt}{2} \end{array}\right| =$$

$$= 3 \cdot \int e^t \cdot \frac{dt}{2} = \frac{3}{2}\int e^t\,dt =$$

$$= \frac{3}{2}e^t + c = \frac{3}{2}e^{x^2} + c.$$

DZ 4.21.

$$\int xe^{3x^2+2}\,dx$$

DZ 4.22.

$$\int e^{2x+3}\,dx \qquad [\textit{supstitucija: } t = 2x+3]$$

4.3 Parcijalna integracija

Vrijedi:

$$\boxed{\int u \cdot v'\,dx \;=\; u \cdot v - \int u' \cdot v\,dx}$$

Neki tipični primjeri integrala koje računamo parcijalnom integracijom:

$$\left.\begin{array}{l} \int x^k \sin x\,dx \\ \int x^k \cos x\,dx \\ \int x^k e^x\,dx \\ \int x^k a^x\,dx \end{array}\right\} \text{stavimo } u = x^k$$

$$\left.\int x^k \ln x\,dx\ \right\} \text{stavimo } u = \ln x$$

$$\left.\begin{array}{l} \int e^x \sin x\,dx \\ \int e^x \cos x\,dx \end{array}\right\} \text{svejedno: ili } u = e^x \text{ ili } v' = e^x$$

Zadatak 4.23.

$$\int x\sin x\,dx = \left|\begin{array}{ll} u = x & v' = \sin x \\ u' = 1 & v = \int \sin x\,dx = -\cos x \end{array}\right| =$$

$$= x\cdot(-\cos x) - \int (-\cos x)\,dx = -x\cos x + \sin x + c.$$

Zadatak 4.24.

$$\int \ln x\,dx = \left|\begin{array}{ll} u = \ln x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = \int 1\,dx = x \end{array}\right| =$$

$$= x\ln x - \int \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,dx = x\ln x - x + c.$$

Zadatak 4.25.

$$\int x\ln\sqrt{x}\,dx = \int x\ln x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\int x\ln x\,dx =$$

$$= \left|\begin{array}{ll} u = \ln x & v' = x \\ u' = \frac{1}{x} & v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln x\cdot\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^{\cancel{2}}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx\right) + c = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\right) + c =$$

$$= \frac{x^2}{4}\ln x - \frac{x^2}{8} + c.$$

Zadatak 4.26.

$$\int \frac{x}{e^x}\,dx = \int xe^{-x}\,dx = \left|\begin{array}{ll} u = x & v' = e^{-x} \\ u' = 1 & v = -e^{-x} \end{array}\right| =$$

$$= x\cdot(-e^{-x}) - \int (-e^{-x})\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = (\diamondsuit) =$$

$$= -xe^{-x} - e^{-x} + c.$$

$$(\diamondsuit) \quad \int e^{-x}\,dx = \left|\begin{array}{l} t = -x \\ dx = -dt \end{array}\right| = \int e^t\cdot(-1)\,dt = -\int e^t\,dt = -e^t = -e^{-x}$$

DZ 4.27.

$$\int e^x \cos x \, dx$$

DZ 4.28.

$$\int (x \ln x + x) \, dx$$

DZ 4.29.

$$\int \frac{x}{e^{2x}} \, dx$$

Zadatak 4.30.

$$\begin{aligned}
\underline{\int e^x \sin x \, dx} &= \left| \begin{array}{ll} u = \sin x & v' = e^x \\ u' = \cos x & v = e^x \end{array} \right| = \\
&= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \cos x & v' = e^x \\ u' = -\sin x & v = e^x \end{array} \right| = \\
&= e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x \cdot (-\sin x) \, dx \right) = \\
&= e^x \sin x - e^x \cos x - \underline{\int e^x \sin x \, dx.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad 2 \cdot \int e^x \sin x \, dx &= e^x \sin x - e^x \cos x \\
\int e^x \sin x \, dx &= \frac{1}{2} \left(e^x \sin x - e^x \cos x \right) + c.
\end{aligned}$$

4.4 Određeni integral i računanje površine lika

Vrijedi:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \ = F(b) - F(a) \quad \Leftrightarrow \quad F'(x) = f(x)}$$

Direktno slijedi svojstvo:

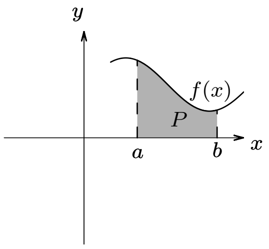
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Zadatak 4.31.

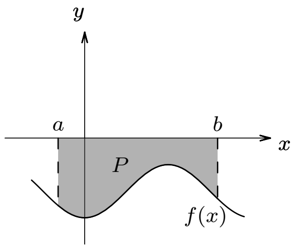
$$\int_0^1 \sqrt[3]{x}dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\Big|_0^1 = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}\Big|_0^1 = \frac{3}{4}\sqrt[3]{1^4} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{0^4} = \frac{3}{4}.$$

<u>Napomena:</u>

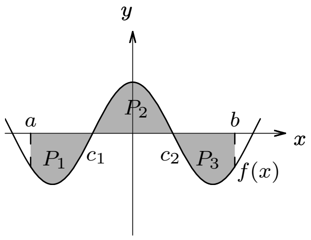
Određeni integral $\int_a^b f(x)dx$ jednak je površini lika omeđenog grafom funkcije $f(x)$, x-osi i pravcima $x = a$ i $x = b$, ako se graf funkcije $f(x)$ nalazi iznad x-osi.
Ako se graf funkcije $f(x)$ nalazi ispod x-osi, tada je određeni integral $\int_a^b f(x)dx$ jednak negativnoj površini lika omeđenog grafom funkcije $f(x)$, x-osi i pravcima $x = a$ i $x = b$.



$P = \int_a^b f(x)dx$



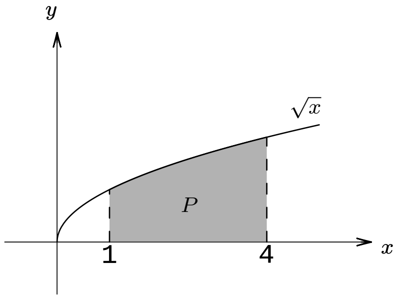
$P = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$



$f(x) = 0 \Rightarrow c_1, c_2$
$P = P_1 + P_2 + P_3$

Zadatak 4.32. *Izračunajte površinu lika omeđenog pravcima $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ i grafom funkcije $f(x) = \sqrt{x}$.*

Rješenje.

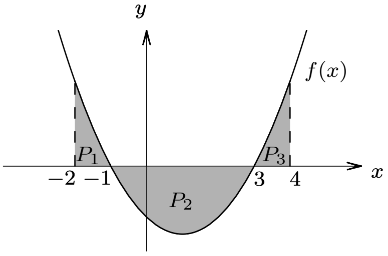


$$P = \int_1^4 \sqrt{x}dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_1^4 = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_1^4$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{4^3} - \frac{2}{3}\sqrt{1^3} = \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3}.$$

□

Zadatak 4.33. *Izračunajte površinu lika kojeg graf funkcije* $f(x) = x^2 - 2x - 3$ *zatvara s* x*-osi na intervalu* $[-2, 4]$.

Rješenje.



$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 3$$

Lik se sastoji od tri dijela:

$$\begin{array}{lll} x \in [-2,-1] & \rightarrow & P_1 \\ x \in [-1,3] & \rightarrow & P_2 \\ x \in [3,4] & \rightarrow & P_3 \end{array}$$

Ukupna površina lika jednaka je zbroju površina pojedinih dijelova:

$$\Rightarrow P = P_1 + P_2 + P_3$$

Preostaje izzračunati površinu svakog dijela:

$$P_1 = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 2x - 3)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} - 3x\right)\Bigg|_{-2}^{-1} =$$

$$= \left(\frac{-1}{3} - 1 + 3\right) - \left(\frac{-8}{3} - 4 + 6\right) = \frac{-1 - 3 + 9 + 8 + 12 - 18}{3} = \frac{7}{3}$$

$$P_2 = \left|\int_{-1}^{3} (x^2 - 2x - 3)dx\right| = \left|\left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right)\Bigg|_{-1}^{3}\right| =$$

$$= \left|\left(\frac{27}{3} - 9 - 9\right) - \left(\frac{-1}{3} - 1 + 3\right)\right| = \left|\frac{27 - 27 - 27 + 1 + 3 - 9}{3}\right| =$$

$$= \left|\frac{-32}{3}\right| = \frac{32}{3}$$

$$P_3 = \int_{3}^{4} (x^2 - 2x - 3)dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right)\Bigg|_{3}^{4} =$$

$$= \left(\frac{64}{3} - 16 - 12\right) - \left(\frac{27}{3} - 9 - 9\right) = \frac{64 - 48 - 36 - 27 + 27 + 27}{3} = \frac{7}{3}$$

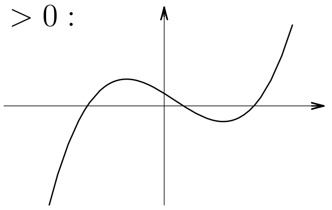
$$\Rightarrow P = \frac{7}{3} + \frac{32}{3} + \frac{7}{3} = \frac{46}{3}.$$

□

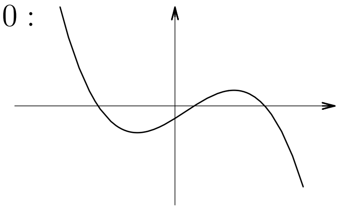
Zadatak 4.34. *Koliki je mjerni broj površine što je krivulja* $y(x) = x(x-1)(x+1)$ *zatvara s osi apscisa?*

Napomena:
Općenito za polinom trećeg stupnja $y(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ vrijedi:

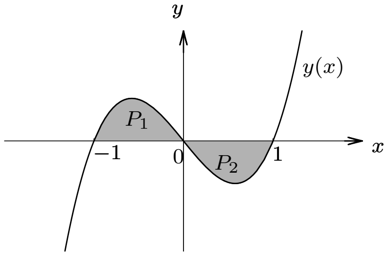
$a_3 > 0:$



$a_3 < 0:$



Rješenje.



$$y(x) = x(x-1)(x+1) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1$$

Krivulja $y(x)$ "zatvara" s osi apscisa dvije površine:

$$\begin{array}{lcl} x \in [-1, 0] & \rightarrow & P_1 \\ x \in [0, 1] & \rightarrow & P_2 \end{array}$$

Ukupna površina jednaka je zbroju površina pojedinih dijelova:

$$\Rightarrow P = P_1 + P_2$$

Preostaje izzračunati površinu svakog dijela:

$$y(x) = x(x-1)(x+1) = (x^2-x)(x+1) = x^3 + x^2 - x^2 - x = x^3 - x$$

$$P_1 = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0} = \left(\frac{0^4}{4} - \frac{0^2}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$P_2 = \left|\int_{0}^{1} (x^3 - x)dx\right| = \left|\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{1}\right| = \left|\frac{-1}{4}\right| = \frac{1}{4}$$

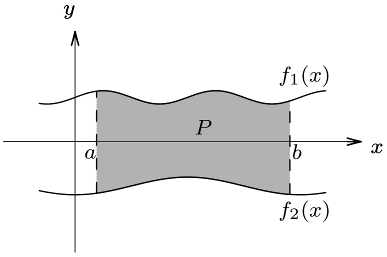
Primijetimo da dijelovi imaju jednake površine (neparna funkcija)!

$$\Rightarrow P = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

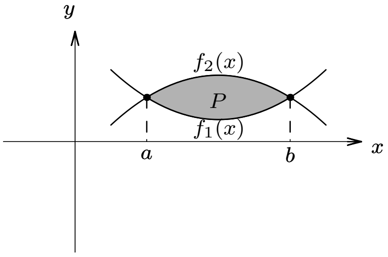
□

Napomena:
Površina lika omeđenog grafovima funkcija $f_1(x)$ i $f_2(x)$, te pravcima $x = a$ i $x = b$, pri čemu je graf funkcije $f_1(x)$ **iznad** grafa funkcije $f_2(x)$, jednaka je

$$P = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx.$$



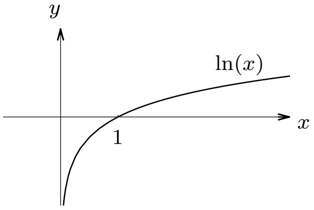
$P = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$

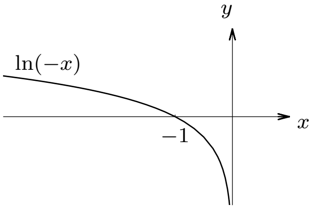


$P = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$

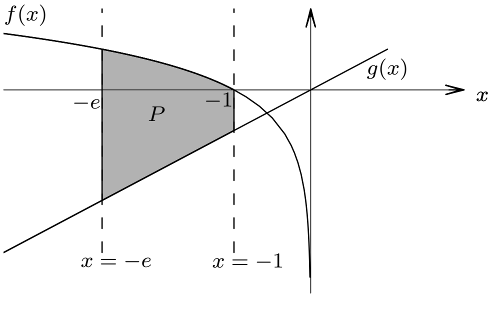
Zadatak 4.35. *Izračunajte površinu lika omeđenog pravcima* $x = -e$, $x = -1$, *te grafovima funkcija* $f(x) = \ln(-x)$ *i* $g(x) = x$.

Rješenje.
Prisjetimo se najprije grafova funkcija $\ln(x)$ i $\ln(-x)$:





Iz podataka zadanih u zadatku dobivamo sljedeći graf:



$$P = \int_{-e}^{-1} (\ln(-x) - x) dx = \int_{-e}^{-1} \ln(-x) dx - \int_{-e}^{-1} x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} t = -x \Rightarrow & \begin{array}{l} x = -e \Rightarrow t = e \\ x = -1 \Rightarrow t = 1 \end{array} \\ dt = -dx & \\ dx = dt & \end{array} \right| = -\int_{e}^{1} \ln t dt - \frac{x^2}{2} \Big|_{-e}^{-1} =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = \ln t & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{t} & v = \int 1 \, dt = t \end{array} \right| = -t \ln t \Big|_{e}^{1} + \int_{e}^{1} t \cdot \frac{1}{t} dt - \frac{x^2}{2} \Big|_{-e}^{-1} =$$

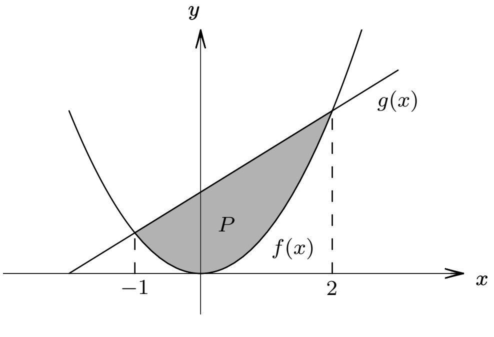
$$= (-t \ln t + t) \Big|_{e}^{1} - \frac{x^2}{2} \Big|_{-e}^{-1} = [(-1 \ln 1 + 1) - (-e \ln e + e)] - [\frac{1}{2} - \frac{e^2}{2}] =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{e^2}{2} = \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2}.$$

□

Zadatak 4.36. *Izračunajte površinu lika omeđenog grafovima funkcija* $f(x) = x^2$ *i* $g(x) = x + 2$.

Rješenje.



Točke presjeka grafova:

$$f(x) = g(x)$$
$$x^2 = x + 2$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$x_1 = -1, \quad x_2 = 2$$

$$P = \int_{-1}^{2} (g(x) - f(x)) dx = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^{2} =$$

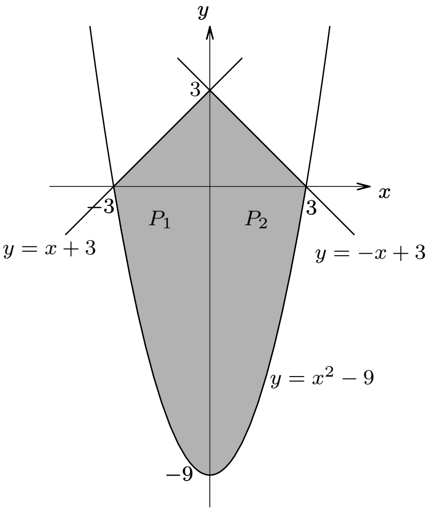
$$= \left(\frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right) = \frac{12 + 24 - 16 - 3 + 12 - 2}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}.$$

□

Zadatak 4.37. *Izračunajte površinu lika kojeg zatvaraju krivulje* $y = x^2 - 9$, $y = -x + 3$ *i* $y = x + 3$ *na intervalu* $[-3, 3]$.

Rješenje.
Pronađimo najprije sve točke presjeka danih krivulja na intervalu $[-3, 3]$.

$$\begin{array}{ccc} x^2 - 9 = x + 3 & x + 3 = -x + 3 & x^2 - 9 = -x + 3 \\ x^2 - x - 12 = 0 & 2x = 0 & x^2 + x - 12 = 0 \\ x_1 = -3, \quad x_2 \not= 4 & x_3 = 0 & x_4 \not= -4, \quad x_5 = 3 \end{array}$$



Lik možemo podijeliti na dva dijela:

$$\begin{array}{lcl} x \in [-3, 0] & \rightarrow & P_1 \\ x \in [0, 3] & \rightarrow & P_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow P = P_1 + P_2$$

$$P_1 = \int_{-3}^{0} (x + 3 - (x^2 - 9))dx = \int_{-3}^{0} (x + 3 - x^2 + 9)dx = \int_{-3}^{0} (-x^2 + x + 12)dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 12x \right) \Bigg|_{-3}^{0} = 0 - \left(\frac{27}{3} + \frac{9}{2} - 36 \right) = \frac{45}{2}$$

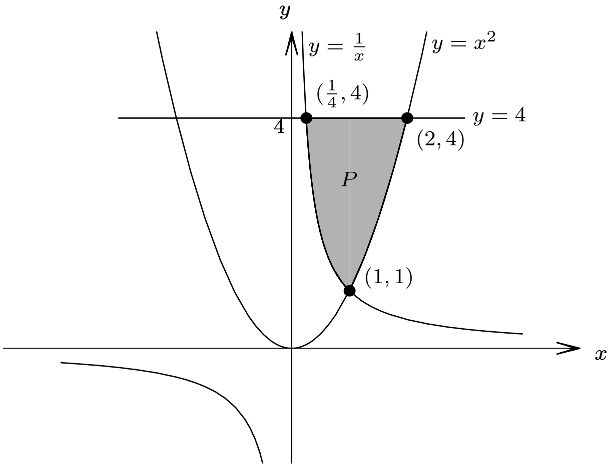
$$P_2 = \int_{0}^{3} (-x + 3 - (x^2 - 9))dx = \ldots = \frac{45}{2} \text{ (Vidi se odmah iz simetrije grafa!)}$$

$$\Rightarrow P = P_1 + P_2 = \frac{45}{2} + \frac{45}{2} = 45.$$

□

DZ 4.38. *Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama* $y = \frac{1}{x}$, $y = x^2$ *i* $y = 4$ *u ravnini* $x \geq 0$.

Rješenje.



$$P = \frac{14}{3} + \ln\frac{1}{4} \approx 3.28$$

□

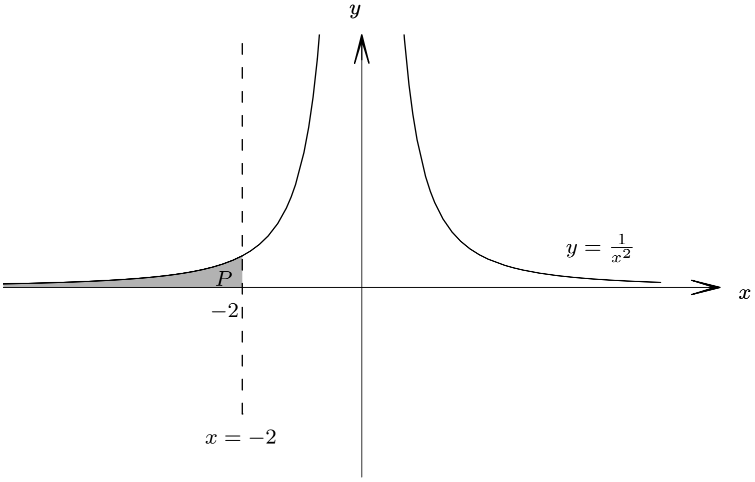
4.5 Nepravi integral

Vrijedi:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{z \to -\infty} \int_{z}^{b} f(x)dx$$
$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{w \to +\infty} \int_{a}^{w} f(x)dx$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{z \to -\infty} \left(\lim_{w \to +\infty} \int_{z}^{w} f(x)dx \right)$$

Zadatak 4.39. *Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljom* $y = x^{-2}$ *i osi apscisa na intervalu* $\langle -\infty, -2]$.

Rješenje.

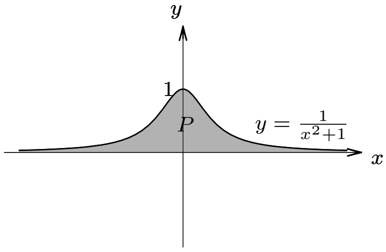


$$P=\int_{-\infty}^{-2} x^{-2}dx=\lim_{z\to-\infty}\int_{z}^{-2} x^{-2}dx=\lim_{z\to-\infty}\frac{x^{-1}}{-1}\Big|_{z}^{-2}=\lim_{z\to-\infty}-\frac{1}{x}\Big|_{z}^{-2}=$$
$$=\lim_{z\to-\infty}\left(\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{z}\right)\right)=\lim_{z\to-\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}.$$

□

Zadatak 4.40. *Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljom* $y=\frac{1}{x^2+1}$ *i* x*-osi.*

Rješenje.



$$P=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}dx=\lim_{z\to-\infty}\left(\lim_{w\to+\infty}\int_{z}^{w}\frac{1}{x^2+1}dx\right)=$$
$$=\lim_{z\to-\infty}\left(\lim_{w\to+\infty}\arctan x\Big|_{z}^{w}\right)=\lim_{z\to-\infty}\left(\lim_{w\to+\infty}(\arctan w-\arctan z)\right)=$$
$$=\lim_{z\to-\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan z\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

□

Poglavlje 5

DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

5.1 Homogene diferencijalne jednadžbe

Zadatak 5.1. *Odredite* ***opće rješenje*** *diferencijalne jednadžbe* $xy' + y = 0$.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
xy' + y &= 0\\
x\frac{dy}{dx} + y &= 0\\
x\frac{dy}{dx} &= -y \quad / \cdot \frac{dx}{x \cdot y}\\
\frac{dy}{y} &= -\frac{dx}{x} \quad / \int\\
\int \frac{dy}{y} &= -\int \frac{dx}{x}\\
\ln|y| &= -\ln|x| + c_1\\
\ln|y| &= -\ln|x| + \ln c, \quad c > 0\\
\ln|y| + \ln|x| &= c, \quad c > 0\\
\ln|y \cdot x| &= \ln c, \quad c > 0\\
|y \cdot x| &= c, \quad c > 0\\
y \cdot x &= c, \quad c \neq 0\\
y(x) &= \frac{c}{x}, \quad c \neq 0.
\end{aligned}$$

□

Za **partikularno rješenje** trebao bi nam i neki dodatni uvjet, npr.:

$$y(1) = 2.$$

Tada dobivamo:

$$y(1) = \frac{c}{1} = 2 \quad \Rightarrow \quad c = 2$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{2}{x}.$$

Zadatak 5.2. *Odredite funkciju $y(x)$ za koju je $E_{y,x} = x^2 + 2x$ i vrijedi $y(0) = e^4$.*

Rješenje.
Prisjetimo se definicije koeficijenta elastičnosti funkcije y u odnosu na varijablu x:

$$E_{y,x} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Sada imamo:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} &= x^2 + 2x \quad / \cdot \frac{dx}{x} \\
\frac{dy}{y} &= (x+2)dx \quad / \int \\
\int \frac{dy}{y} &= \int (x+2)dx \\
\ln|y| &= \frac{x^2}{2} + 2x + c_1 \\
\ln|y| &= \frac{x^2}{2} + 2x + \ln c, \quad c > 0 \\
\ln|y| - \ln c &= \frac{x^2}{2} + 2x, \quad c > 0 \\
\ln \frac{|y|}{c} &= \frac{x^2}{2} + 2x, \quad c > 0 \\
\frac{|y|}{c} &= e^{\frac{x^2}{2} + 2x}, \quad c > 0 \\
|y| &= c \cdot e^{\frac{x^2}{2} + 2x}, \quad c > 0 \\
y(x) &= c \cdot e^{\frac{x^2}{2} + 2x}, \quad c \neq 0
\end{aligned}$$

Dobili smo opće rješenje, a da bismo dobili partikularno iskoristit ćemo zadani uvjet $y(0) = e^4$:

$$y(0) = c \cdot e^{0+0} = c \cdot 1 = c = e^4$$

$$\Rightarrow y(x) = e^4 \cdot e^{\frac{x^2}{2} + 2x}$$

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2} + 2x + 4}.$$

□

Zadatak 5.3. *Odredite funkciju potražnje* $q(p)$ *za koju je* $E_{q,p} = -2p$, *uz* $q(0) = 2$.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\frac{p}{q} \cdot q' &= -2p \\
\frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp} &= -2p \quad /\frac{dp}{p} \\
\frac{dq}{q} &= -2dp \quad /\int \\
\ln|q| &= -2p + \ln c, \quad c > 0 \\
\ln\frac{|q|}{c} &= -2p, \quad c > 0 \\
\frac{|q|}{c} &= e^{-2p}, \quad c > 0 \\
q(p) &= c \cdot e^{-2p}, \quad c \neq 0
\end{aligned}$$

Iz uvjeta $q(0) = 2$ slijedi:

$$\begin{aligned}
q(0) = c \cdot e^0 = c \cdot 1 = c = 2 \\
\Rightarrow q(p) = 2 \cdot e^{-2p}.
\end{aligned}$$

□

Zadatak 5.4. *Zadana je funkcija graničnih troškova* $t(Q) = (1 + Q)e^{-Q}$ *kao funkcija proizvodnje* Q*. Odredite funkciju ukupnih troškova ako fiksni troškovi iznose 100.*

Rješenje.

$$\begin{aligned}
t(Q) &= \frac{dT}{dQ} \quad / \cdot dQ \\
dT &= t(Q)dQ \quad /\int \\
\int dT &= \int t(Q)dQ \\
T(Q) &= \int (1+Q)e^{-Q}dQ = \left| \begin{array}{ll} u = 1+Q & v' = e^{-Q} \\ u' = 1 & v = \int e^{-Q}dQ = -e^{-Q} \end{array} \right| = \\
&= (1+Q) \cdot (-e^{-Q}) - \int -e^{-Q}dQ = -e^{-Q}(1+Q) + \int e^{-Q}dQ = \\
&= -e^{-Q}(1+Q) - e^{-Q} + c
\end{aligned}$$

$$T(0) = -e^{-0}(1+0) - e^{-0} + c = -1 - 1 + c = -2 + c = 100$$
$$\Rightarrow c = 102$$

$$\Rightarrow T(Q) = -e^{-Q}(1+Q) - e^{-Q} + 102$$

□

Zadatak 5.5. *Zadana je funkcija graničnih troškova* $MC(Q) = 2Q^2 - Q + (Q+1)^{-1}$ *i cijena* $p(Q) = 5 - Q$ *u ovisnosti o proizvodnji* Q. *Ako su fiksni troškovi 3, odredite funkciju dobiti.*

Rješenje.
dobit=prihodi-troškovi
$\Pi(Q) = R(Q) - C(Q)$

$$\begin{aligned}
R(Q) &= p(Q) \cdot Q = (5-Q)Q = 5Q - Q^2 \\
C(Q) &= \int MC(Q)dQ = \int (2Q^2 - Q + \frac{1}{Q+1})dQ = \begin{vmatrix} t = Q+1 \\ dt = dQ \end{vmatrix} = \\
&= 2 \cdot \frac{Q^3}{3} - \frac{Q^2}{2} + \int \frac{1}{t}dt = \frac{2}{3}Q^3 - \frac{Q^2}{2} + \ln|t| + c = \\
&= \frac{2}{3}Q^3 - \frac{Q^2}{2} + \ln(Q+1) + c \\
C(0) &= 0 + \ln 1 + c = c = 3 \\
C(Q) &= \frac{2}{3}Q^3 - \frac{Q^2}{2} + \ln(Q+1) + 3 \\
\Pi(Q) &= 5Q - Q^2 - \frac{2}{3}Q^3 + \frac{Q^2}{2} - \ln(Q+1) - 3 \\
&= -\frac{2}{3}Q^3 - \frac{1}{2}Q^2 + 5Q - \ln(Q+1) - 3
\end{aligned}$$

□

Poglavlje 6

FINANCIJSKA MATEMATIKA

6.1 Jednostavni kamatni račun

Smisao jednostavnog kamatnog računa je da se kamate obrčunavaju za svako razdoblje ukamaćivanja od iste glavnice.

6.1.1 Dekurzivni obračun kamata

Dekurzivni obračun kamata podrazumijeva da se kamate obračunavaju na kraju razdoblja od glavnice s početka razdoblja.
Uvodimo sljedeće oznake:

C_0 – početna vrijednost (glavnica)
n – broj razdoblja ukamaćivanja
p – dekurzivni kamatnjak
C_n – konačna vrijednost na kraju n-tog razdoblja
K_n – kamata na kraju n-tog razdoblja
(ili K – ukupne kamate)

Uz dane oznake vrijedi:

$$C_n = C_0(1 + \frac{np}{100})$$
$$K_n = C_n - C_0$$
$$K_n = \frac{np}{100}C_0$$

Primjer 6.1. *Iznos od* 10000 *kn oroči se na* 5 *godina uz godišnji kamatnjak* 3*. Kolika je konačna vrijednost tog iznosa na kraju pete godine ako je obračun kamata jednostavan, godišnji i dekurzivan? Koliko iznose ukupne kamate na kraju* 5*. godine?*

Rješenje.

$$\begin{aligned} C_0 &= 10000 \\ n &= 5 \\ p &= 3(\%) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_5 &= ? \\ K_5 &= ? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_5 &= C_0(1+\frac{np}{100}) = 10000(1+\frac{5\cdot 3}{100}) = 11500 \text{ kn} \\ K_5 &= C_5 - C_0 = 11500 - 10000 = 1500 \text{ kn} \\ (\text{ili } K_5 &= \frac{np}{100}C_0 = \frac{5\cdot 3}{100}\cdot 10000 = 1500 \text{ kn}) \end{aligned}$$

□

6.1.2 Anticipativni obračun kamata

Anticipativni obračun kamata podrazumijeva da se kamate obračunavaju na početku razdoblja od glavnice s kraja razdoblja.
Koristimo iste oznake kao i ranije, uz dodatak

$$q \quad - \quad \text{anticipativni kamatnjak}$$

Vrijedi:

$$\begin{aligned} K &= \frac{qn}{100}C_n \\ C_n &= \frac{100}{100-qn}C_0 \\ K &= C_n - C_0 \end{aligned}$$

Primjer 6.2. *Kolika je konačna vrijednost glavnice od* 15000 *kn na kraju pete godine uz* 5% *godišnjih kamata ako je obračun jednostavan, godišnji i anticipativan?*

Rješenje.

$$\begin{aligned} C_0 &= 15000 \\ n &= 5 \\ q &= 5 \\ \hline C_5 &=? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_5 &= \frac{100}{100-nq} C_0 = \frac{100}{100-5\cdot 5}\cdot 15000 = 20000 \text{ kn} \\ K &= C_5 - C_0 = 20000 - 15000 = 5000 \text{ kn} \end{aligned}$$

□

6.2 Složeni kamatni račun

Dekurzivni obračun

Koristimo sljedeće oznake:

K_i – kamata na kraju i-te godine (nastala u toj godini)
C_i – glavnica na kraju i-te godine
r – dekurzivni kamatni faktor
$p(G)$ – godišnji dekurzivni kamatnjak
C_n – konačna vrijednost glavnice nakon n godina
C_0 – početna vrijednost glavnice
K – ukupne kamate

Vrijede sljedeće (osnovne) formule:

$$\begin{aligned} K_i &= \frac{C_{i-1}\cdot p(G)}{100} \\ C_i &= C_{i-1} + K_i \\ r &= 1 + \frac{p(G)}{100} \\ C_n &= C_0 \cdot (r^n) \\ K &= C_0(r^n - 1) \\ K &= C_n - C_0 \\ C_0 &= \frac{C_n}{r^n} \end{aligned}$$

Ukratko:

- **konačna vrijednost glavnice:**

$$C_n = C_0 \cdot r^n$$

- **početna vrijednost glavnice:**

$$C_0 = \frac{C_n}{r^n}$$

Ako imamo zadani broj godina kapitalizacije (n), te početnu i konačnu vrijednost glavnice, dekurzivni kamatni faktor računamo po formuli

$$r = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}},$$

a ako imamo zadani dekurzivni kamatni faktor (r), te početnu i konačnu vrijednost glavnice, broj godina kapitalizacije računamo po formuli

$$n = \frac{\log C_n - \log C_0}{\log r}.$$

Zadatak 6.3. *U banku je danas uložen iznos od* 10000 *kn. Kolika je vrijednost tog uloga na kraju pete godine ako je godišnji kamatnjak* 3*, a obračun kamata dekurzivan, godišnji i složen?*

Rješenje.

$$\begin{aligned} C_0 &= 10000 \\ n &= 5 \\ p(G) &= 3 \end{aligned}$$

$$C_5 = ?$$

$$\begin{aligned} r &= 1 + \frac{p(G)}{100} = 1 + \frac{3}{100} = 1.03 \\ C_5 &= C_0 \cdot r^5 = 10000 \cdot (1.03)^5 = 11592.74 \text{ kn} \end{aligned}$$

□

Zadatak 6.4. *Iznos od* 10000 *kn oroči se na* 5 *godina. Ako je banka prve dvije godine primjenjivala godišnji kamatnjak* 3*, a u preostalom razdoblju* 2*, izračunajte konačnu vrijednost uloženog iznosa. Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan.*

Rješenje.

$$\begin{aligned} C_0 &= 10000 \\ n &= 5 \\ n_1 &= 2, \quad p_1(G) = 3 \\ n_2 &= 3, \quad p_2(G) = 2 \end{aligned}$$

$$C_5 = ?$$

$$\begin{aligned} r_1 &= 1 + \frac{p_1(G)}{100} = 1 + \frac{3}{100} = 1.03 \\ r_2 &= 1 + \frac{p_2(G)}{100} = 1 + \frac{2}{100} = 1.02 \\ C_n &= C_0 \cdot r_1^{n_1} \cdot r_2^{n_2} \\ C_5 &= C_0 \cdot r_1^2 \cdot r_2^3 = 10000 \cdot (1.03)^2 \cdot (1.02)^3 = 11258.36 \text{ kn} \end{aligned}$$

□

Zadatak 6.5. *Jedno poduzeće duguje iznose od* 100000 *kn na kraju druge i* 200000 *kn na kraju treće godine. Kojim iznosom može to poduzeće podmiriti navedeno dugovanje krajem pete godine, ako je godišnji kamatnjak* 8*? Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan.*

Rješenje.

$$\begin{aligned} D_1 &= 100000 \\ D_2 &= 200000 \\ p(G) &= 8 \end{aligned}$$

$$C_5 = ?$$

$$\begin{aligned} r &= 1 + \frac{p(G)}{100} = 1 + \frac{8}{100} = 1.08 \\ C_5 &= D_1 \cdot r^3 + D_2 \cdot r^2 = 100000 \cdot (1.08)^3 + 200000 \cdot (1.08)^2 = 359251.20 \text{ kn} \end{aligned}$$

□

Zadatak 6.6. *U banci je oročeno* 10000 *kn na* 5 *godina. Na kraju treće godine vlasnik računa je podigao iznos od* 5000 *kn. Koliko će na računu biti na kraju pete godine ako je godišnji kamatnjak za prve dvije godine* 4, *a za ostatak razdoblja* 5*? Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan.*

Rješenje.

$$\begin{aligned} C_0 &= 10000 \\ D_1 &= 5000 \\ p_1(G) &= 4 \Rightarrow r_1 = 1.04 \\ p_2(G) &= 5 \Rightarrow r_1 = 1.05 \end{aligned}$$

$$C_5 = ?$$

$$C_5 = C_0 \cdot r_1^2 \cdot r_2^3 - D_1 \cdot r_2^2 = 12520.87 - 5512.5 = 7008.37 \text{ kn}$$

□

Zadatak 6.7. *Koliki iznos treba oročiti danas na* 10 *godina uz godišnji kamatnjak* 4 *za prve četiri godine, a* 3 *u preostalom razdoblju, ako se želi da konačna vrijednost bude* 30000 *kn? Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan.*

Rješenje.

$$\begin{aligned} C_{10} &= 30000 \\ n &= 10 \\ p_1(G) &= 4 \Rightarrow r_1 = 1.04 \\ p_2(G) &= 3 \Rightarrow r_1 = 1.03 \end{aligned}$$

$$C_0 = ?$$

$$\begin{aligned} C_{10} &= C_0 \cdot r_1^4 \cdot r_2^6 \quad \Rightarrow \\ C_0 &= \frac{C_{10}}{r_1^4 r_2^6} = \frac{30000}{(1.04)^4(1.03)^6} = 21476.55 \text{ kn} \end{aligned}$$

□

Zadatak 6.8. *Poduzeće duguje iznos od* 100000 *kn na kraju treće i* 150000 *kn na kraju pete godne od danas. Kojim se iznosom može podmiriti cijeli dug*

a) *danas*

b) *na kraju druge godine*

c) *na kraju treće godine*

d) *na kraju šeste godine*

od danas ako je godišnji kamatnjak za prve dvije godine 8*, a u preostalom razdoblju* 7*? Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan.*

Rješenje.

$$
\begin{aligned}
D_3 &= 100000\\
D_5 &= 150000\\
p_1(G) &= 8 \Rightarrow r_1 = 1.08\\
p_2(G) &= 7 \Rightarrow r_1 = 1.07
\end{aligned}
$$

---

a)

$$C_0 = \frac{D_3}{r_1^2 r_2} + \frac{D_5}{r_1^2 r_2^3} = \frac{100000}{1.08^2 \cdot 1.07} + \frac{150000}{1.08^2 \cdot 1.07^3} = 185101.70 \text{ kn}$$

b)

$$C_2 = \frac{D_3}{r_2} + \frac{D_5}{r_2^3} = \frac{100000}{1.07} + \frac{150000}{1.07^3} = 215902.63 \text{ kn}$$

c)

$$C_3 = D_3 + \frac{D_5}{r_2^2} = 100000 + \frac{150000}{1.07^2} = 231015.81 \text{ kn}$$

d)

$$C_6 = D_3 \cdot r_2^3 + D_5 \cdot r_2 = 100000 \cdot 1.07^3 + 150000 \cdot 1.07 = 283004.30 \text{ kn}$$

□

Zadatak 6.9. *Iznos od* 20000 *kn oroči se na* 3 *godine. Ako su ukupne kamate jednake* 3152.50 *kn, uz koju je godišnju stopu izvršeno oročenje? Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan.*

Rješenje.

$$\begin{aligned} C_0 &= 20000 \\ n &= 3 \\ K &= 3152.50 \end{aligned}$$

$$p = ?$$

$$\begin{aligned} &C_3 = C_0 + K = 20000 + 3152.50 = 23152.50 \\ &C_3 = C_0 \cdot r^3 \quad \Rightarrow \quad r^3 = \frac{C_3}{C_0} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{C_3}{C_0}} \\ &r = \sqrt[3]{\frac{23152.50}{20000}} = 1.05 \\ &r = 1 + \frac{p}{100} \quad \Rightarrow \quad p = (r-1) \cdot 100 = 0.05 \cdot 100 = 5 \end{aligned}$$

□

Općenito vrijedi formula:

$$p = 100 \cdot (\sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1).$$

6.3 Relativna i konformna kamatna stopa

Relativna i konformna kamatna stopa koriste se ako osnovno razdoblje ukamaćivanja nije jednake duljine kao osnovno razdoblje na koje se odnosi **nominalna** (propisana) kamatna stopa.

Neka je:

d_1 – duljina vremenskog intervala na koji se odnosi nominalna kamatna stopa
d – duljina vremenskog intervala u kojem se obavlja ukamaćivanje.

Tada je

$$m = \frac{d_1}{d}$$

broj osnovnih razdoblje ukamaćivanja u razdoblju na koje se odnosi nominalna kamatna stopa.

Definiramo:

- RELATIVNI KAMATNJAK

$$p_R = \frac{p}{m}$$

- KONFORMNI KAMATNJAK

$$r_K = r^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{r}$$

$$\Rightarrow \quad p_K = 100(r_K - 1).$$

Napomena:
Ako drugačije nije naglašeno, koristi se konformni kamatnjak!

Zadatak 6.10. *Na koju vrijednost naraste* 50000 *kn na kraju osme godine ako je godišnja kamatna stopa* 4%*? Obračun kamata je*

a) *polugodišnji,*

b) *dvogodišnji,*

c) *kvartalni.*

Koristite relativni kamatnjak.

Rješenje.

$$\begin{aligned} C_0 &= 50000 \\ n &= 8 \\ p &= 4 \text{ godišnje} \end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned} d_1 &= 1 \text{ godina} \\ d &= 1 \text{ polugodište} \\ m &= \frac{d_1}{d} = \frac{1 \text{ g}}{1 \text{ pol}} = \frac{2 \text{ pol}}{1 \text{ pol}} = 2 \\ p_R &= \frac{p}{m} = \frac{4}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad r_R = 1.02 \\ n &= 8 \text{ godina} = 16 \text{ polugodišta} \\ C_{16} &= C_0 \cdot r_R^{16} = 68639.29 \text{ kn} \end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
d_1 &= 1 \text{ godina}\\
d &= 2 \text{ godine}\\
m &= \frac{d_1}{d} = \frac{1 \text{ g}}{2 \text{ g}} = \frac{1}{2}\\
p_R &= \frac{p}{m} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8 \quad \Rightarrow \quad r_R = 1.08\\
n &= 8 \text{ godina} = 4 \text{ dvogodišta}\\
C_4 &= C_0 \cdot r_R^4 = 68024.45 \text{ kn}
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
d_1 &= 1 \text{ godina}\\
d &= 1 \text{ kvartal}\\
m &= \frac{d_1}{d} = \frac{1 \text{ g}}{1 \text{ kvartal}} = \frac{4 \text{ kvartala}}{1 \text{ kvartal}} = 4\\
p_R &= \frac{p}{m} = \frac{4}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad r_R = 1.01\\
n &= 8 \text{ godina} = 32 \text{ kvartala}\\
C_{32} &= C_0 \cdot r_R^{32} = 68747.03 \text{ kn}
\end{aligned}
$$

□

Zadatak 6.11. *Neka osoba uloži u banku početkom prve godine* 50000 *eura, a početkom četvrte godine podigne* 20000 *eura. Koliku će svotu ta osoba imati u banci krajem četvrte godine ako je polugodišnji kamatnjak* 3%, *a obračun kamata*

a) *polugodišnji,*

b) *mjesečni.*

Koristite relativni kamatnjak.

Rješenje.

a) Jedno obračunsko razdoblje je jedno polugodište pa sve preračunavamo u polugodišta.

$$
\begin{aligned}
p &= 3 \quad \Rightarrow \quad r = 1.03\\
n &= 8 \text{ polugodišta}\\
C_8 &= 50000 \cdot r^8 - 20000 \cdot r^2 = 42120.50 \text{ kn}
\end{aligned}
$$

b) Jedno obračunsko razdoblje je jedan mjesec pa sve preračunavamo u mjesece.

$$\begin{aligned}
m &= \frac{1 \text{ pol}}{1 \text{ mj}} = \frac{6 \text{ mj}}{1 \text{ mj}} = 6 \\
p_R &= \frac{p}{m} = \frac{3}{6} = 0.5 \quad \Rightarrow \quad r_R = 1.005 \\
n &= 4 \text{ godine} = 48 \text{ mjeseci} \\
C_{48} &= 50000 \cdot r^{48} - 20000 \cdot r^{12} = 42290.90 \text{ kn}
\end{aligned}$$

☐

Zadatak 6.12. *Neka osoba uloži u banku početkom prve godine* 50000 *eura, a početkom treće i četvrte godine podigne po* 10000 *eura. Koliku će svotu ta osoba imati u banci na kraju pete godine ako je obračun*

a) *godišnji,*

b) *mjesečni,*

a godišnja kamatna stopa 9%*? Primijenjujemo konformni kamatnjak.*

Rješenje.

a)

$$\begin{aligned}
p &= 9 \quad \Rightarrow \quad r = 1.09 \\
C_5 &= 50000 \cdot r^5 - 10000 \cdot r^3 - 10000 \cdot r^2 = 52099.90 \text{ kn}
\end{aligned}$$

b) Jedno obračunsko razdoblje je jedan mjesec pa sve preračunavamo u mjesece.

$$\begin{aligned}
m &= \frac{1 \text{ god}}{1 \text{ mj}} = \frac{12 \text{ mj}}{1 \text{ mj}} = 12 \\
r_K &= r^{\frac{1}{m}} = r^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{1.09} = 1.00721 \\
n &= 5 \text{ godina} = 60 \text{ mjeseci} \\
C_{60} &= 50000 \cdot r_K^{60} - 10000 \cdot r_K^{36} - 10000 \cdot r_K^{24} = 52099.90 \text{ kn}
\end{aligned}$$

Važno:
Primijetimo da se, za razliku od relativnog, s konformnim kamatnjakom dobiva uvijek isti iznos, bez obzira na vremenski interval između obračuna. ☐

Zadatak 6.13. *Neka osoba uloži u banku* 10000 *eura. Koliku će svotu imati ta osoba u banci krajem pete godine ako banka prve tri godine primjenjuje godišnju kamatnu stopu* 10%*, a zadnje dvije* 7%*? Obračun kamata je složen, polugodišnji i dekurzivan.*

Rješenje.

$$\begin{aligned}
m &= \frac{1 \text{ god}}{1 \text{ polug}} = \frac{2 \text{ polug}}{1 \text{ polug}} = 2 \\
r_1 &= 1.1 \quad \Rightarrow \quad r_{K1} = 1.1^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1.1} = 1.04881 \\
r_2 &= 1.07 \quad \Rightarrow \quad r_{K2} = 1.07^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1.07} = 1.03441 \\
n &= 5 \text{ godina} = 10 \text{ polugodišta} \\
C_{10} &= 10000 \cdot r_{K1}^6 \cdot r_{K2}^4 = 15238.62 \text{ kn}
\end{aligned}$$

□

Zadatak 6.14. *Neka osoba uloži u banku početkom prve godine* 50000 *kn, a početkom četvrte podigne* 20000 *kn. Koliku će svotu ta osoba imati u banci krajem četvrte godine ako je godišnji kamatnjak* 2*, a obračun kamata složen, dekurzivan, mjesečni, uz*

a) *relativni kamatnjak,*

b) *konformni kamatnjak?*

Rješenje.

$$\begin{aligned}
n &= 4 \text{ god} = 48 \text{ mj} \\
p(G) &= 2 \Rightarrow r = 1.02 \\
\hline
C_{48} &=?
\end{aligned}$$

Godišnju kamatnu stopu moramo pretvoriti u mjesečnu.

a)

$$\begin{aligned}
m &= \frac{1 \text{ god}}{1 \text{ mj}} = \frac{12 \text{ mj}}{1 \text{ mj}} = 12 \Rightarrow \\
p_R(M) &= \frac{p(G)}{m} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} = 0.166666667 \Rightarrow r_R = 1.001666667 \\
C_{48} &= 50000 \cdot r_R^{48} - 20000 \cdot r_R^{12} = \\
&= 50000 \cdot (1.001666667)^{48} - 20000 \cdot (1.001666667)^{12} = \\
&= 54160.75 - 20403.69 = 33757.06 \text{ kn}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} m &= 12 \Rightarrow r_K = r^{\frac{1}{12}} = 1.02^{\frac{1}{12}} \\ C_{48} &= 50000 \cdot r_K^{48} - 20000 \cdot r_K^{12} = \\ &= 50000 \cdot (r^{\frac{1}{12}})^{48} - 20000 \cdot (r^{\frac{1}{12}})^{12} = \\ &= 50000 \cdot r^4 - 20000 \cdot r = \\ &= 50000 \cdot 1.02^4 - 20000 \cdot 1.02 = \\ &= 54121.608 - 20400 = 33721.61 \text{ kn} \end{aligned}$$

□

6.4 Konačna (buduća) vrijednost prenumerando i postnumerando uplata ili isplata

Pretpostavimo da imamo višekratne jednake uloge u određenim, jednakim vremenskim intervalima. Pitamo se kolika je konačna vrijednost svih tih uloga na kraju n-tog razdoblja.

Uvodimo sljedeće oznake:

R – konstantna uplata (isplata) u određenim, jednakim vremenskim intervalima
n – broj razdoblja ukamaćivanja
p – konstantni godišnji kamatnjak
S_n – konačna vrijednost prenumerando uplata (isplata) na kraju n-tog razdoblja
S'_n – konačna vrijednost postnumerando uplata (isplata) na kraju n-tog razdoblja

PRENUMERANDO uplate (isplate) su uplate (isplate) koje se izvršavaju uvijek na početku vremenskog razdoblja. Konačna vrijednost na kraju n-tog razdoblja uplata (isplata) izvršenih početkom svakog od n razdoblja (ili kraće, **konačna vrijednost n prenumerando uplata (isplata)**) jednaka je:

$$\begin{aligned} S_n &= R \cdot r^n + R \cdot r^{n-1} + \ldots + R \cdot r^2 + R \cdot r = \\ &= R \cdot r \cdot (r^{n-1} + r^{n-2} + \ldots + r + 1) = \\ &= R \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} \end{aligned}$$

$$\boxed{S_n = R \cdot r \cdot \tfrac{r^n-1}{r-1}}$$

POSTNUMERANDO uplate (isplate) su uplate (isplate) koje se izvršavaju uvijek na kraju vremenskog razdoblja. Konačna vrijednost na kraju n-tog razdoblja uplata (isplata) izvršenih krajem svakog od n razdoblja (ili kraće, **konačna vrijednost n postnumerando uplata (isplata)**) jednaka je:

$$\begin{aligned} S'_n &= R \cdot r^{n-1} + R \cdot r^{n-2} + \ldots + R \cdot r + R = \\ &= R \cdot (r^{n-1} + r^{n-2} + \ldots + r + 1) = \\ &= R \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} \end{aligned}$$

$$\boxed{S'_n = R \cdot \tfrac{r^n-1}{r-1}}$$

Zadatak 6.15. *Osoba ulaže u banku početkom svake godine po* 15000 *kn kroz pet godina. Ako je godišnji kamatnjak* 7*, kolika je konačna vrijednost svih uplata na kraju pete, a kolika na kraju osme godine? Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan.*

Rješenje.

$$\begin{aligned} R &= 15000 \\ p &= 7 \Rightarrow r = 1.07 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_5 &=? \\ C_8 &=? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_5 &= R \cdot r \cdot \frac{r^5 - 1}{r - 1} = 15000 \cdot 1.07 \cdot \frac{1.07^5 - 1}{1.07 - 1} = 92299.36 \text{ kn} \\ C_8 &= S_5 \cdot r^3 = 92299.36 \cdot 1.07^3 = 113070.67 \text{ kn} \end{aligned}$$

□

Zadatak 6.16. *Neka osoba početkom svake godine u prve tri godine uplaćuje po* 10000 *eura uz* 10% *godišnje kamatne stope, a u daljnjih sedam godina po* 15000 *eura uz* 8% *godišnje kamatne stope. Koliko će ta osoba imati u banci na kraju petnaeste godine ako se i dalje primjenjuje godišnja kamatna stopa od* 8%*?*

Rješenje.

$$\begin{aligned} R_1 &= 10000 \\ R_2 &= 15000 \\ p_1 &= 10 \Rightarrow r_1 = 1.1 \\ p_2 &= 8 \Rightarrow r_2 = 1.08 \end{aligned}$$

$$C_{15} = ?$$

$$\begin{aligned} S_3 &= R_1 \cdot r_1 \cdot \frac{r_1^3 - 1}{r_1 - 1} = 10000 \cdot 1.1 \cdot \frac{1.1^3 - 1}{1.1 - 1} = 36410 \\ S_7 &= R_2 \cdot r_2 \cdot \frac{r_2^7 - 1}{r_2 - 1} = 15000 \cdot 1.08 \cdot \frac{1.08^7 - 1}{1.08 - 1} = 144549.42 \\ C_{15} &= S_3 \cdot r_2^{12} + S_7 \cdot r_2^5 = 304077.09 \text{ eur} \end{aligned}$$

□

Zadatak 6.17. *Osoba ulaže u banku na ime stambene štednje krajem svakog mjeseca po* 500 *kn. Koliku će svotu ta osoba imati u banci na kraju godine ako joj se u tom trenutku uplate i državna poticajna sredstva od* 1250 *kn? Godišnji kamatnjak je* 3*, a obračun kamata mjesečni, složen i dekurzivan?*

Rješenje.

$R = 500$

$n = 12$ mjeseci

$p = 3 \Rightarrow r = 1.03$

$C_{12} = ?$

$$\begin{aligned} m &= \frac{1 \text{ god}}{1 \text{ mj}} = \frac{12}{1} = 12 \\ r_K &= r^{\frac{1}{m}} = 1.03^{\frac{1}{12}} = 1.00246627 \\ S'_{12} &= R \cdot \frac{r_K^{12} - 1}{r_K - 1} = 6082.06 \\ C_{12} &= S'_{12} + 1250 = 7332.06 \text{ kn} \end{aligned}$$

□

Zadatak 6.18. *Osoba treba na kraju pete godine platiti iznos od* 30000 *eura. U dogovoru s vjerovnikom dužnik se obvezao da će krajem svake godine kroz pet godina uplaćivati određenu svotu. Koja je to svota ako vjerovnik traži* 8% *godišnjih kamata, a obračun je godišnji, složen i dekurzivan?*

Rješenje.

$S'_5 = 30000$

$n = 5$

$p = 8 \Rightarrow r = 1.08$

$R = ?$

$$\begin{aligned} S'_5 &= R \cdot \frac{r^5 - 1}{r - 1} \Rightarrow \\ R &= S'_5 \cdot \frac{r - 1}{r^5 - 1} = 30000 \cdot \frac{1.08 - 1}{1.08^5 - 1} = 5113.69 \text{ eur} \end{aligned}$$

□

Zadatak 6.19. *Neka je osoba uplaćivala u banku početkom svake godine po* 5000 *eura kroz* 5 *godina. Koliko će ta osoba imati u banci na kraju desete godine ako je banka prve tri godine primjenjivala kamatnu stopu* 6%*, u preostalom razdoblju* 5%*, i ako je osoba na kraju sedme godine podigla iznos od* 10000 *eura?*

Rješenje.

$$
\begin{aligned}
R &= 5000\\
n &= 5\\
p_1 &= 6 \Rightarrow r_1 = 1.06\\
p_2 &= 6 \Rightarrow r_2 = 1.05
\end{aligned}
$$

$$C_{10} = ?$$

$$
\begin{aligned}
S_3 &= R \cdot r_1 \cdot \frac{r_1^3 - 1}{r_1 - 1} = 16873.08\\
S_2 &= R \cdot r_2 \cdot \frac{r_2^2 - 1}{r_2 - 1} = 10762.50\\
C_{10} &= S_3 \cdot r_2^7 + S_2 \cdot r_2^5 - 10000 \cdot r_2^3 = 25901.85 \text{ eur}
\end{aligned}
$$

□

6.5 Početna (sadašnja) vrijednost prenumerando i postnumerando isplata (renti)

Pretpostavimo da imamo višekratne jednake isplate u određenim, jednakim vremenskim intervalima. Pitamo se kolika je početna vrijednost svih tih uloga na početku prvog razdoblja.

Dodatno, koristimo još i ove oznake:

A_n – početna vrijednost postnumerando isplata

A'_n – početna vrijednost prenumerando isplata

Početna vrijednost na početku prvog razdoblja isplata izvršenih krajem svakog od n razdoblja (ili kraće, **početna vrijednost n postnumerando isplata**) jednaka je:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{R}{r} + \frac{R}{r^2} + \ldots + \frac{R}{r^n} = \\ &= \frac{R}{r^n}(r^{n-1} + r^{n-2} + \ldots + 1) = \\ &= \frac{R}{r^n} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} \end{aligned}$$

$$\boxed{A_n = \frac{R}{r^n} \cdot \frac{r^n-1}{r-1}}$$

Početna vrijednost na početku prvog razdoblja isplata izvršenih početkom svakog od n razdoblja (ili kraće, **početna vrijednost n prenumerando isplata**) jednaka je:

$$\begin{aligned} A_n' &= R + \frac{R}{r} + \ldots + \frac{R}{r^{n-1}} = \\ &= \frac{R}{r^{n-1}}(r^{n-1} + r^{n-2} + \ldots + 1) = \\ &= \frac{R}{r^{n-1}} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} \end{aligned}$$

$$\boxed{A_n' = \frac{R}{r^{n-1}} \cdot \frac{r^n-1}{r-1}}$$

Zadatak 6.20. *Koliki iznos treba danas uložiti u banku da se osigura* 5 *godišnjih postnumerando isplata po* 30000 *kn i na kraju šeste godine jednokratna isplata od* 50000 *kn? Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivan, a godišnja kamatna stopa* 8%.

Rješenje.

$R = 30000$

$n = 5$

$p = 8 \Rightarrow r = 1.08$

$C_0 = ?$

$$C_0 = A_5 + \frac{50000}{r^6} = \frac{R}{r^5} \cdot \frac{r^5 - 1}{r - 1} + \frac{50000}{r^6} = 151289.78 \text{ kn}$$

□

Zadatak 6.21. *Početkom svake godine osoba uplaćuje u banku po* 10000 *eura kroz tri godine. Na početku četvrte godine počinje joj se isplaćivati polugodišnja renta početkom svakog polugodišta kroz dvije godine. Izračunajte visinu rente ako banka za prve tri godine primjenjuje godišnju kamatnu stopu* 6%*, a u preostalom razdoblju* 5%*. Obračun kamata je polugodišnji složen i dekurzivan.*

Rješenje.

$R_1 = 10000$

$p_1 = 6 \Rightarrow r_1 = 1.06 \Rightarrow r_{K_1} = \sqrt{1.06}$

$p_2 = 5 \Rightarrow r_2 = 1.05 \Rightarrow r_{K_2} = \sqrt{1.05}$

$R_2 = ?$

Budući da se koristi konformni kamatnjak, S_3 možemo izračunati i tako da obračunavamo gorišnje kamate:

$$S_3 = R_1 \cdot r_1 \cdot \frac{r_1^3 - 1}{r_1 - 1} = 33746.16 \text{ kn}$$

S druge strane, početnu vrijednost prenumerando rente, A_4' moramo računati obračunavajući kamatnu stopu polugodišnje. Koristeći da S_3 mora biti jednako A_4' dobivamo:

$$A_4' = \frac{R_2}{r_{K_2}^3} \cdot \frac{r_{K_2}^4 - 1}{r_{K_2} - 1} = 33746.16$$

$$\Rightarrow R_2 = 33746.16 \cdot \frac{r_{K_2}^3 (r_{K_2} - 1)}{r_{K_2}^4 - 1} = 8747.72 \text{ kn}$$

Napomena:
Uvjerimo se još jednom da je, zbog konformnosti kamatne stope, svejedno da li računamo S_3 preko polugodišnjeg ili preko godišnjeg obračuna:

$$\begin{aligned} S_3 &= R_1 \cdot r_{K_1}^6 + R_1 \cdot r_{K_1}^4 + R_1 \cdot r_{K_1}^2 = R_1 \cdot r_{K_1}^2 \cdot (r_{K_1}^4 + r_{K_1}^2 + 1) = \\ &= R_1 \cdot r_1 \cdot (r_1^2 + r_1 + 1) = R_1 \cdot r_1 \cdot \frac{r_1^3 - 1}{r_1 - 1} \end{aligned}$$

□

6.6 Zajam

Model zajma temelji se na činjenici da početna vrijednost svih uplaćenih anuiteta mora biti jednaka visini odobrenog zajma.

6.6.1 Model otplate zajma uz jednake anuitete

Koristimo sljedeće oznake:

$C = C_0$ – visina zajma
a – jednaki anuiteti
p – konstantni dekurzivni kamatnjak
n – broj razdoblja otplate zajma
$r = 1 + \frac{p}{100}$ – dekurzivni kamatni faktor
C_k – ostatak duga na kraju k-tog razdoblja
I_k – kamata na kraju k-tog razdoblja nastala u tom razdoblju
R_k – otplatna kvota na kraju k-tog razdoblja

Vrijedi:

$$C = C_0 = a \cdot \frac{r^n - 1}{r^n(r-1)} \quad \Rightarrow \quad a = C \cdot \frac{r^n(r-1)}{r^n - 1}$$

$$I_k = \frac{C_{k-1} \cdot p}{100}$$

$$R_k = a - I_k$$

$$C_k = C_{k-1} - R_k$$

Navedene formule omogućavaju nam sastavljanje otplatne tablice zajma.

Lako se izvedu još i ove formule:

$$R_n = C_{n-1}$$
$$R_k = R_{k-1} \cdot r$$
$$C_k = a \cdot \frac{r^{n-k} - 1}{r^{n-k}(r-1)}$$

Smisao otplate zajma je da se kroz anuitete otplati sam zajam ali i kamate stvorene u svim razdobljima. Stoga vrijedi:

$$\sum_1^n a = \sum_1^n I_k + \sum_1^n R_k = \sum_1^n I_k + C$$

Zadatak 6.22. *Zajam od* 30000 *kn odobren je na* 3 *godine uz godišnji kamatnjak* 10 *i plaćanje jednakih anuiteta krajem godine. Sastavite otplatnu tablicu. Obračun je godišnji, složen i dekurzivan.*

Rješenje.

$$C = 30000$$
$$p = 10 \Rightarrow r = 1.1$$
$$n = 3$$

$$a = C \cdot \frac{r^n(r-1)}{r^n - 1} = 30000 \cdot \frac{1.1^3(1.1-1)}{1.1^3 - 1} = 12063.44$$

1. godina:

$$I_1 = \frac{C_0 \cdot p}{100} = \frac{30000 \cdot 10}{100} = 3000$$
$$R_1 = a - I_1 = 12063.44 - 3000 = 9063.44$$
$$C_1 = C_0 - R_1 = 30000 - 9063.44 = 20936.56$$

2. godina:

$$I_2 = \frac{C_1 \cdot p}{100} = \frac{20936.56 \cdot 10}{100} = 2093.66$$
$$R_2 = a - I_2 = 12063.44 - 2093.66 = 9969.79$$
$$C_2 = C_1 - R_2 = 20936.56 - 9969.79 = 10966.77$$

3. godina:

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{C_2 \cdot p}{100} = \frac{10966.77 \cdot 10}{100} = 1096.68\\
R_3 &= a - I_3 = 12063.44 - 1096.68 = 10966.77\\
C_3 &= C_2 - R_3 = 10966.77 - 10966.77 = 0
\end{aligned}$$

Konačno, otplatna tablica izgleda ovako:

k	a	I_k	R_k	C_k
0	–	–	–	30000
1	12063.44	3000	9063.44	20936.56
2	12063.44	2093.66	9969.79	10966.77
3	12063.44	1096.68	10966.77	0
$\sum$	36190.33	6190.33	30000	

□

Zadatak 6.23. *Zajam od* 100000 *kn odobren je na* 2 *godine uz godišnji kamatnjak* 10 *i plaćanje jednakih anuiteta krajem polugodišta. Sastavite otplatnu tablicu ako je obračun složen, dekurzivan i polugodišnji.*

Rješenje.

$$\begin{aligned}
C &= 100000\\
p(G) &= 10 \Rightarrow r = 1.1\\
n &= 2 \text{ god} = 4 \text{ polugodišta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m &= \frac{1 \text{ god}}{1 \text{ pol}} = \frac{2 \text{ pol}}{1 \text{ pol}} = 2 \Rightarrow r_K = r^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1.1} \Rightarrow p_K = 100(\sqrt{1.1} - 1)\\
a &= C \cdot \frac{r_K^4(r_K - 1)}{r_K^4 - 1} = C \cdot \frac{r^2(r_K - 1)}{r^2 - 1} = 100000 \cdot \frac{1.1^2(\sqrt{1.1} - 1)}{1.1^2 - 1} = 28123.19
\end{aligned}$$

Koristeći formule

$$\begin{aligned}
I_k &= \frac{C_{k-1} \cdot p_K}{100},\\
R_k &= a - I_k,\\
C_k &= C_{k-1} - R_k,
\end{aligned}$$

dobivamo sljedeću otplatnu tablicu:

k	a	I_k	R_k	C_k
0	–	–	–	100000
1	28123.19	4880.88	23242.31	76757.69
2	28123.19	3746.45	24376.74	52380.95
3	28123.19	2556.65	25566.54	26814.41
4	28123.19	1308.78	26814.41	0
$\sum$	112492.76	12492.76	100000	

□

Zadatak 6.24. *Zajam od* 100000 *kn treba otplatiti u dvije godine jednakim anuitetima krajem polugodišta. Koliki su anuiteti ako se prve godine primjenjuje mjesečni kamatnjak* 1.1*, a druge godine godišnji kamatnjak* 10*. Obračun kamata je složen, dekurzivan i polugodišnji. Primijenite relativni kamatnjak!*

Rješenje.

$$\begin{aligned} C &= 100000 \\ p_1(M) &= 1.1 \\ p_2(G) &= 10 \\ n &= 2 \text{ god} = 4 \text{ polugodišta} \end{aligned}$$

Kako je obračun polugodišnji, oba kamatnjaka moramo pretvoriti u polugodišnje i to relativno.

$$m_1 = \frac{1 \text{ mj}}{1 \text{ pol}} = \frac{1 \text{ mj}}{6 \text{ mj}} = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow p_{R_1} = \frac{p_1 M}{m_1} = \frac{1.1}{\frac{1}{6}} = 6.6 \quad \Rightarrow r_{R_1} = 1.066$$

$$m_2 = \frac{1 \text{ god}}{1 \text{ pol}} = \frac{2 \text{ pol}}{1 \text{ pol}} = 2 \quad \Rightarrow p_{R_2} = \frac{p_2 G}{m_2} = \frac{10}{2} = 5 \quad \Rightarrow r_{R_2} = 1.05$$

Anuitete ćemo izračunati tako da izjednačimo visinu zajma sa početnom vrijednosti svih uplaćenih anuiteta:

$$\begin{aligned} C &= \frac{a}{r_{R_1}} + \frac{a}{r_{R_1}^2} + \frac{a}{r_{R_1}^2 r_{R_2}} + \frac{a}{r_{R_1}^2 r_{R_2}^2} \quad / \cdot r_{R_1}^2 r_{R_2}^2 \\ C \cdot r_{R_1}^2 r_{R_2}^2 &= a \cdot r_{R_1} r_{R_2}^2 + a \cdot r_{R_2}^2 + a \cdot r_{R_2} + a \\ &= a \cdot (r_{R_1} r_{R_2}^2 + r_{R_2}^2 + r_{R_2} + 1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = \frac{C \cdot r_{R_1}^2 r_{R_2}^2}{r_{R_1} r_{R_2}^2 + r_{R_2}^2 + r_{R_2} + 1} = 28948.72 \text{ kn}$$

□

6.6.2 Model otplate zajma uz jednake otplatne kvote

U ovom modelu otplate zajma u svakom razdoblju otplati se isti dio zajma (glavnice) i pripadna kamata. Dakle otplatne kvote su iste za svako razdoblje, a različiti su anuiteti.

Koristimo sljedeće oznake:

$C = C_0$ – visina zajma

a_k – anuitet na kraju k-tog razdoblja

p – konstantni dekurzivni kamatnjak

n – broj razdoblja otplate zajma

$r = 1 + \frac{p}{100}$ – dekurzivni kamatni faktor

C_k – ostatak duga na kraju k-tog razdoblja

I_k – kamata na kraju k-tog razdoblja nastala u tom razdoblju

R – jednake otplatne kvote

Vrijedi:

$$R = \frac{C}{n}$$

$$I_k = \frac{C_{k-1} \cdot p}{100}$$

$$a_k = R + I_k$$

$$C_k = C_{k-1} - R$$

$$\text{ili alternativno: } C_k = C(1 - \tfrac{k}{n})$$

Zadatak 6.25. *Zajam od* 100000 *kn odobren je na* 2 *godine uz* 10% *godišnjih kamata i iste otplatne kvote. Sastavite otplatnu tablicu. Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan.*

Rješenje.

$$C = 100000$$

$$p(G) = 10 \Rightarrow r = 1.1$$

$$n = 2$$

$$R = \frac{C}{n} = \frac{100000}{2} = 50000$$

1. godina:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{C_0 \cdot p}{100} = \frac{100000 \cdot 10}{100} = 10000 \\ a_1 &= R + I_1 = 50000 + 10000 = 60000 \\ C_1 &= C_0 - R = 100000 - 50000 = 50000 \end{aligned}$$

2. godina:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{C_1 \cdot p}{100} = \frac{50000 \cdot 10}{100} = 5000 \\ a_2 &= R + I_2 = 50000 + 5000 = 55000 \\ C_2 &= C_1 - R_2 = 50000 - 50000 = 0 \end{aligned}$$

dobivamo sljedeću otplatnu tablicu:

k	a_k	I_k	R	C_k
0	–	–	–	100000
1	60000	10000	50000	50000
2	55000	50000	50000	0
$\sum$	115000	15000	100000	

□

6.6.3 Model otplate zajma unaprijed dogovorenim anuitetima

U ovom modelu zajam C treba amortizirati dogovorenim jednakim anuitetima a krajem svakog razdoblja uz kamatnjak p. Pitamo se koliko je **vrijeme amortizacije**, tj. koliko će anuiteta trebati ukupno uplatiti.
Iz

$$a = C \cdot \frac{r^n(r-1)}{r^n - 1}$$

slijedi da je **vrijeme amortizacije**:

$$\boxed{n = \frac{\ln a - \ln[a - C(r-1)]}{\ln r}}$$

Ukoliko n nije cijeli broj, zaokružujemo ga na prvi manji, uz napomenu da je vrijeme amortizacije $n+1$. Na kraju računamo koliko mora iznositi posljednji, $(n+1)$. anuitet (svi prethodni anuiteti iznose a!). Taj anuitet naziva se još i **krnji anuitet** i označava se sa a'_{n+1}.

$$\boxed{a'_{n+1} = C \cdot r^{n+1} - a \cdot r \cdot \tfrac{r^n-1}{r-1}}$$

Zadatak 6.26. *Poduzeće traži zajam od* 200000 *kn uz* 9% *godišnjih kamata i može plaćati anuitet od* 50000 *kn krajem godine. Odredite vrijeme amortizacije.*

Rješenje.

$$\begin{aligned} C &= 200000 \\ p &= 9 \Rightarrow r = 1.09 \\ a &= 50000 \\ n &= 2 \text{ god} = 4 \text{ polugodišta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= \frac{\ln a - \ln[a - C(r-1)]}{\ln r} = \\ &= \frac{\ln 50000 - \ln[50000 - 200000(1.09-1)]}{\ln 1.09} = \\ &= 5.179 \text{ godina} \end{aligned}$$

Krnji anuitet:

$$\begin{aligned} a'_{n+1} &= C \cdot r^{n+1} - a \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r-1} \quad \Rightarrow \\ a'_6 &= C \cdot r^6 - a \cdot r \cdot \frac{r^5-1}{r-1} = \\ &= 200000 \cdot 1.09^6 - 50000 \cdot 1.09 \cdot \frac{1.09^5 - 1}{1.09 - 1} = \\ &= 9253.29 \text{ kn} \end{aligned}$$

Dakle, da bi se otplatio zajam od 200000 kn uz anuitete od 50000 kn, potrebno je krajem svake od 5 godina uplatiti anuitet od 50000 kn i još na kraju 6. godine 5253.29 kn. □

6.7 Potrošački kredit

Potrošački kredit predstavlja primjer jednostavnog i anticipativnog obračuna kamata.

Koristimo sljedeće oznake:

C – iznos odobrenog potrošačkog kredita
P – udio u gotovini
C_1 – iznos stvarnog potrošačkog kredita
$\overline{K}$ – ukupna kamata
C_2 – ukupno dugovanje
R – mjesečna rata
p – postotak udjela u gotovini
k – kamatni koeficijent
m – broj **mjeseci** na koji je odobren potrošački kredit
q – godišnji anticipativni kamatnjak

Ukupno dugovanje po potrošačkom kreditu dobivamo kada od iznosa odobrenog potrošačkog kredita C oduzmemo udio u gotovini P i dodamo ukupne kamate $\overline{K}$:

	iznos odobrenog potrošačkog kredita	C
-	udio u gotovini	P
	iznos stvarnog potrošačkog kredita	C_1
+	ukupne kamate	$\overline{K}$
	ukupno dugovanje	C_2

Vrijedi:

$$P = C \cdot \frac{p}{100}$$

$$\overline{K} = C_1 \cdot \frac{k}{100}$$

$$R = \frac{C_2}{m}$$

$$\boxed{\begin{gathered} k = \tfrac{(m+1)\cdot q}{24} \\ C \cdot (1 - \tfrac{p}{100})(1 + \tfrac{k}{100}) = R \cdot m \end{gathered}}$$

Napomena:

Obično se u praksi uzima da mjesečna rata može iznositi najviše 1/3 mjesečne plaće.

Zadatak 6.27. *Potrošacki kredit u iznosu od* 50000 *eura banka je odobrila uz rok otplate od* 4 *godine, godišnju anticipativnu kamatnu stopu* 15% *i udjel u gotovini od* 30%*. Izračunajte iznos udjela u gotovini, ukupne kamate i iznos mjesečne rate.*

Rješenje.

$$\begin{aligned} C &= 50000 \\ m &= 4 \text{ godine} = 48 \text{ mjeseci} \\ p &= 30\% \\ q &= 15\% \end{aligned}$$

$$P, \overline{K}, R = ?$$

$$P = C \cdot \frac{p}{100} = 50000 \cdot \frac{30}{100} = 15000$$

Za računanje ukupne kamate $\overline{K}$ potrebno je najprije izračunati iznos stvarnog potrošačkog kredita C_1 i kamatni koeficijent k:

$$C_1 = C - P = 50000 - 15000 = 35000$$
$$k = \frac{(m+1) \cdot q}{24} = \frac{49 \cdot 15}{24} = 30.625$$

$$\Rightarrow \overline{K} = C_1 \cdot \frac{k}{100} = 35000 \cdot \frac{30.625}{100} = 10718.75$$

Za računanje mjesečne rate R potrebno je najprije izračunati ukupno dugovanje C_2:

$$C_2 = C_1 + \overline{K} = 35000 + 10718.75 = 45718.75$$
$$\Rightarrow R = \frac{C_2}{m} = \frac{45718.75}{48} = 952.47$$

□

Zadatak 6.28. *Na koje je vrijeme odobren potrošacki kredit od* 30000*, ako je postotak udjela u gotovini* 20*, godišnja anticipativna kamatna stopa* 16%*,a mjesečna rata* 1166.67 *eura.*

Rješenje.

$C = 30000$
$R = 1166.67$
$p = 20\%$
$q = 16\%$

$m = ?$

Uvrštavanjem

$$k = \frac{(m+1) \cdot q}{24}$$

u

$$C \cdot (1 - \frac{p}{100})(1 + \frac{k}{100}) = R \cdot m$$

dobivamo

$$C \cdot (1 - \frac{p}{100})(1 + \frac{(m+1) \cdot q}{2400}) = R \cdot m$$

$$\begin{aligned}30000\cdot(1-\frac{20}{100})(1+\frac{(m+1)\cdot 16}{2400}) &= 1166.67\cdot m\\ 24000+160\cdot(m+1) &= 1166.67\cdot m\\ 24160 &= 1006.67\cdot m\end{aligned}$$

$$\Rightarrow m = 24 \text{ mjeseca}$$

□

6.8 Kontinuirano ukamaćivanje

Koristimo sljedeće oznake:

n – vrijeme u godinama

p – prosječni godišnji prirast (u postocima)

C_0 – početna vrijednost glavnice

C_n – konačna vrijednost glavnice nakon n godina konstantnog ukamaćivanja

Kontinuirano ukamaćivanje je poseban obračun kamata, u kojem se kamate obračunavaju svakog trenutka i pribrajaju glavnici, tj. nema vremenskog diskontinuiteta između dva obračuna kamata i njihovog pribrajanja glavnici unutar vremenskog trajanja kapitalizacije.

Kontinuirana kapitalizacija se primjenjuje u određivanju prirodnog rasta (prirasta biljaka, životinja, ljudi) i u makroekonomskim istraživanjima.
Vrijedi:

$$\boxed{C_n = C_0\cdot e^{\frac{n\cdot p}{100}}}$$

Iz toga lako slijedi:

$$C_0 = C_n\cdot e^{-\frac{n\cdot p}{100}} \qquad \text{i} \qquad n = \frac{100}{p}\cdot\ln\frac{C_n}{C_0}$$

Zadatak 6.29. *Za koje će vrijeme drvne mase u nekoj šumi biti* 50% *više ako je prosječni godišnji prirast* 2.8%*?*

Rješenje.

$$\begin{aligned} &C_0 \\ C_n &= C_0 + \frac{50}{100} \cdot C_0 = 1.5 \cdot C_0 \\ p &= 2.8\% \\ \hline n &=? \end{aligned}$$

$$C_n = C_0 \cdot e^{\frac{n \cdot p}{100}} \quad \Rightarrow e^{\frac{n \cdot p}{100}} = \frac{C_n}{C_0} \quad \Rightarrow \frac{n \cdot p}{100} = \ln \frac{C_n}{C_0} \quad \Rightarrow n = \frac{100}{p} \cdot \ln \frac{C_n}{C_0}$$

$$n = \frac{100}{p} \cdot \ln \frac{C_n}{C_0} = \frac{100}{p} \cdot \ln \frac{1.5 \cdot C_0}{C_0} = \frac{100}{2.8} \cdot \ln 1.5 = 14.48$$

$$\Rightarrow n = 14 \text{ g } 5 \text{ mj } 23 \text{ d}$$

□

Zadatak 6.30. *Za koliko se godina drvna masa od* $9230m^3$ *neke šume povećala još za* $3000m^3$ *ako je prosječni godišnji prirast* 2%*?*

Rješenje.

$$\begin{aligned} C_0 &= 9230 \\ C_n &= C_0 + 3000 = 12230 \\ p &= 2\% \\ \hline n &=? \end{aligned}$$

$$n = \frac{100}{p} \cdot \ln \frac{C_n}{C_0} = \frac{100}{2} \cdot \ln \frac{12230}{9230} = 14.072 \text{ godina}$$

□

Zadatak 6.31. *Koliko je teško bilo pile prije* 6 *mjeseci ako je danas njegova težina* 2 *kg, a godišnji prirast* 250%*?*

Rješenje.

$$\begin{aligned} C_n &= 2 \\ n &= 6 \text{ mj} = 0.5 \text{ god} \\ p &= 250\% \end{aligned}$$

$$C_0 = ?$$

$$C_0 = C_n \cdot e^{-\frac{n \cdot p}{100}} = 2 \cdot e^{-\frac{0.5 \cdot 250}{100}} = 2e^{-\frac{125}{100}} = 0.573 \text{ kg}$$

Pile je prije 6 mjeseci bilo teško 0.573 kg. □

Zadatak 6.32. *Koliko će kg dijete imati na svoj* 6. *rođendan ako je rođeno s* 2.5 *kg i ako se pretpostavlja da prve* 2 *godine kontinuirano dobiva na težini* 5% *mjesečno, a sljedeće* 4 *godine prosječno* 2% *mjesečno? Koristite relativnu kamatnu stopu.*

Rješenje.

$$\begin{aligned} C_0 &= 2.5 \text{ kg} \\ n_1 &= 2 \text{ god} \\ p_1 &= 5\% \text{ mjesečno} \\ n_2 &= 4 \text{ god} \\ p_2 &= 2\% \text{ mjesečno} \end{aligned}$$

$$C_6 = ?$$

$$\begin{aligned} m &= \frac{1 \text{ mj}}{1 \text{ god}} = \frac{1 \text{ mj}}{12 \text{ mj}} = \frac{1}{12} \Rightarrow \\ p_{R_1} &= \frac{p_1}{m} = \frac{5}{\frac{1}{12}} = 60\% \text{ godišnje} \\ p_{R_2} &= \frac{p_2}{m} = \frac{2}{\frac{1}{12}} = 24\% \text{ godišnje} \\ C_2 &= C_0 \cdot e^{\frac{n_1 \cdot p_{R_1}}{100}}, \qquad C_6 = C_2 \cdot e^{\frac{n_2 \cdot p_{R_2}}{100}} \Rightarrow \\ C_6 &= C_0 \cdot e^{\frac{n_1 \cdot p_{R_1}}{100}} \cdot e^{\frac{n_2 \cdot p_{R_2}}{100}} = 2.5 \cdot e^{\frac{2 \cdot 60}{100}} \cdot e^{\frac{4 \cdot 24}{100}} = 21.677 \text{ kg} \end{aligned}$$

□