

Sukcesivne isplate — rente

1. dio

Vježbe 10, akademska 2024/25

Andrej Ševa

andrej.seva@ef.unibl.org

Upotreba IV finansijskih tablica

- Jednake sukcesivne isplate, uglavnom raspoređene u unaprijed definisanim jednakim vremenskim intervalima

- 3 varijante:

1. Period kapitalisanja = Period isplata
2. Period isplata < Period kapitalisanja
(češće isplate od kapitalisanja)
3. Period isplata > Period kapitalisanja
(češće kapitalisanje od isplata)

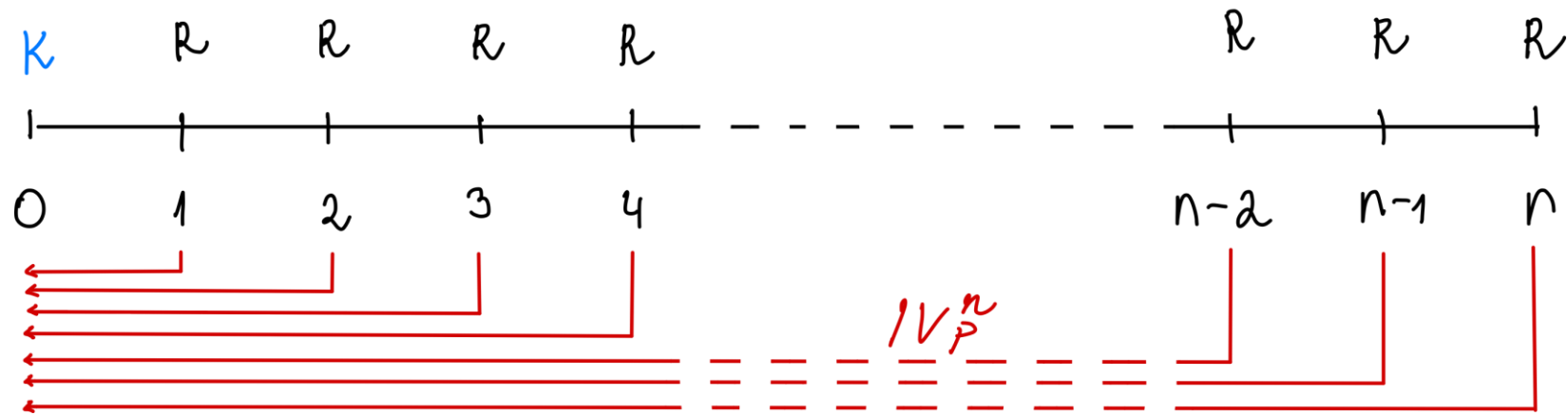
+ Vječite rente

Anticipativne

Dekurzivne

Period kapitalisanja = Period isplata

Dekurzivne isplate



$$K = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^n(r - 1)}$$

$$K = R \cdot IV_p^n$$

Dekurzivne isplate — izvođenje obrasca

$$K = R \cdot \frac{1}{r} + R \cdot \frac{1}{r^2} + R \cdot \frac{1}{r^3} + R \cdot \frac{1}{r^4} + \dots + R \cdot \frac{1}{r^{n-2}} + R \cdot \frac{1}{r^{n-1}} + R \cdot \frac{1}{r^n}$$

$$K = R \cdot \left(\frac{1}{r}\right) + R \cdot \left(\frac{1}{r}\right)^2 + R \cdot \left(\frac{1}{r}\right)^3 + R \cdot \left(\frac{1}{r}\right)^4 + \dots + R \cdot \left(\frac{1}{r}\right)^{n-2} + R \cdot \left(\frac{1}{r}\right)^{n-1} + R \cdot \left(\frac{1}{r}\right)^n$$

$$\frac{1}{r} = v$$

$$K = R \cdot v + R \cdot v^2 + R \cdot v^3 + R \cdot v^4 + \dots + R \cdot v^{n-2} + R \cdot v^{n-1} + R \cdot v^n$$

$$K = R \cdot (v + v^2 + v^3 + v^4 + \dots + v^{n-2} + v^{n-1} + v^n)$$

Izdvojićemo sumu ovog niza (unutar zagrade):

$$S = v + v^2 + v^3 + v^4 + \dots + v^{n-2} + v^{n-1} + v^n / \cdot v$$

$$S \cdot v = v^2 + v^3 + v^4 + v^5 \dots + v^{n-1} + v^n + v^{n+1}$$

$$S - S \cdot v = v^{n+1} - v$$

$$S(1 - v) = v - v^{n+1}$$

$$S = \frac{v - v^{n+1}}{1 - v}$$

$$S = \frac{v(1 - v^n)}{1 - v}$$

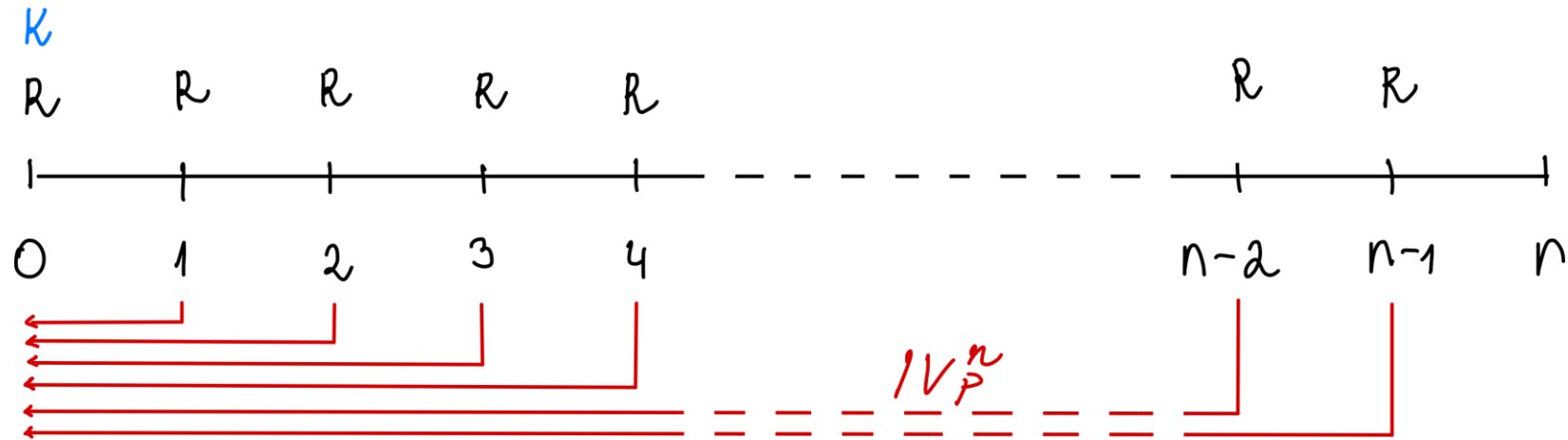
$$S = \frac{\frac{1}{r}[(1 - (\frac{1}{r})^n)]}{1 - \frac{1}{r}} = \dots = \frac{r^n - 1}{r^n(r - 1)}$$

Vratimo u prvobitni obrazac:

$$K = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^n(r - 1)}$$

$$K = R \cdot IV_p^n$$

Anticipativne isplate



$$K = R \cdot \frac{r(r^n - 1)}{r^n(r - 1)}$$

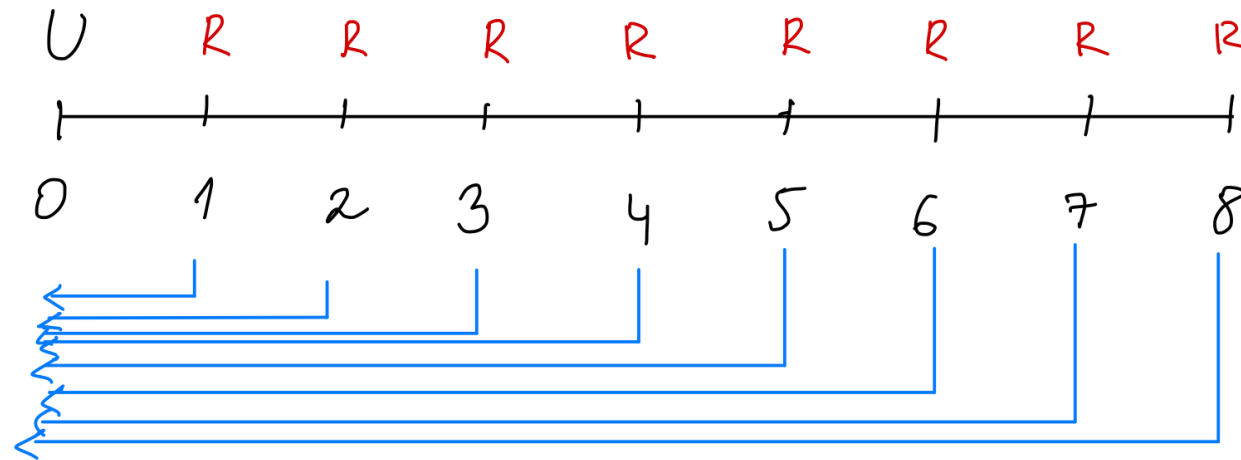
$$K = R \cdot (1 + IV_p^{n-1})$$

Primjeri

1. Polugodišnja renta od 3.000 n.j. prima se 4 godine. Primanje rente počinje 6 mjeseci poslije uplate. Kamate se obračunava polugodišnje na osnovu godišnje kamatne stope 8% (d). Kolika je uplata?
2. Koliko bi novčanih jedinica trebalo izdvojiti u neki fond za pomoć radnicima za korišćenje plaćenog odsustva u toku 3 godine, uz godišnje ukamaćenje po stopi 7% (d), ako bi godišnja pomoć bila 5.000 n.j. i ako bi isplata počela odmah?
3. Koliko bi novčanih jedinica trebalo uplatiti za 6 godišnjih isplata po 4.200 n.j. ako bi se prva suma primila 4 godine nakon uplate i ako se kamata obračunava godišnje po stopi 5% (d)? Pretpostaviti da su isplate: a) dekurzivne i b) anticipativne.
4. Ugovorom o stipendiranju, fond se obavezao da će stipendisti isplaćivati mjesečno, i to u toku 4 godine po 200 n.j. Pored toga, fond će isplatiti na ime nagrade 1.000 n.j. ako stipendista završi studije za 4 godine. Isplata treba da počne: a) jedan mjesec od dana potpisivanja ugovora i b) na dan potpisivanja ugovora. Fond je dinamičan i uvažava vremensku vrijednost novca, pa je godišnja kamatna stopa, uz mjesečni obračun, 12%. Izračunati vrijednost sredstava namijenjenih za stipendistu na dan zaključenja ugovora o stipendiranju.

Primjeri

1. Polugodišnja renta od 3.000 n.j. prima se 4 godine. Primanje rente počinje 6 mjeseci poslije uplate. Kamate se obračunava polugodišnje na osnovu godišnje kamatne stope 8% (d). Kolika je uplata?



$$R = 3.000 \text{ n.j.}$$

$$mn = 8$$

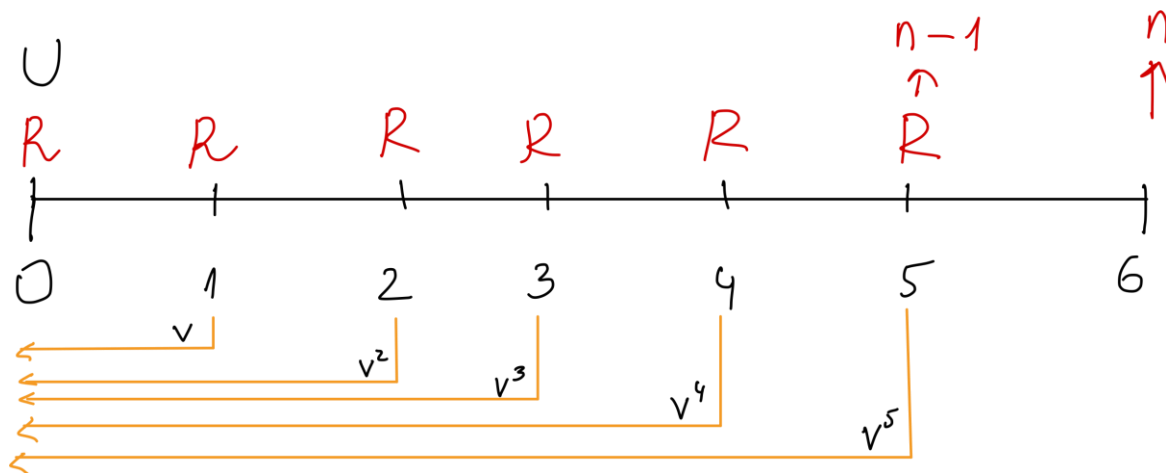
$$i = 0,08 \rightarrow$$

$$i_r = 0,04 \rightarrow \frac{p}{m} = 4$$

$$U = 3.000 \cdot /V_4^8$$

Primjeri

2. Koliko bi novčanih jedinica trebalo izdvojiti u neki fond za pomoć radnicima za korišćenje plaćenog odsustva u toku 6 godina, uz godišnje ukamaćenje po stopi 7% (d), ako bi godišnja pomoć bila 5.000 n.j. i ako bi isplata počela odmah? Prvo izvesti obrazac ovih tablica, pa onda prikazati konačan model.



$$U = R + Rv + Rv^2 + Rv^3 + Rv^4 + Rv^5$$

$$U = R(1 + v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5)$$

$$U = 5.000(1 + v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5)$$

$$v^5 = v^{6-1} = v^{n-1}$$

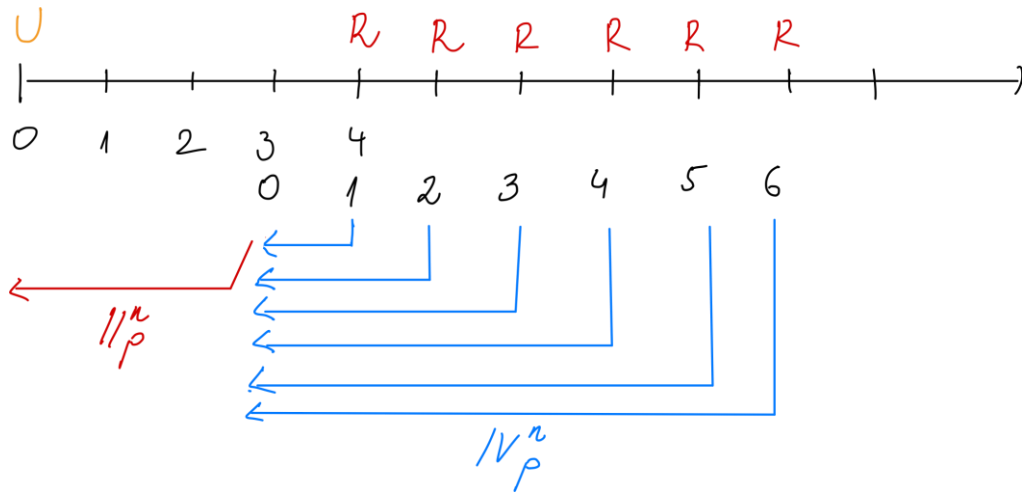
$$U = 5.000 \left(1 + \frac{1 - v^6}{1 - v} \right)$$

→ obrazac za
anticipativne
rente

Primjeri

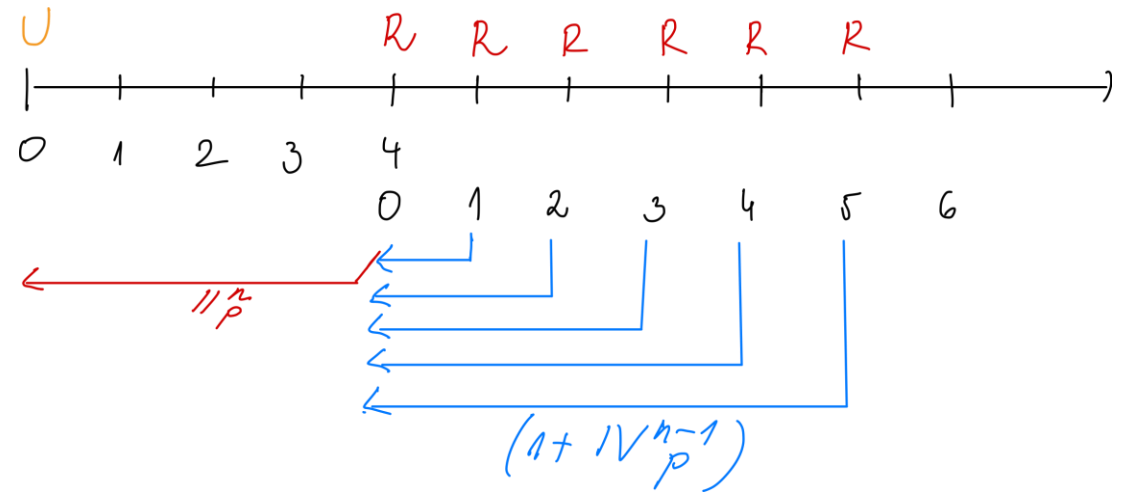
3. Koliko bi novčanih jedinica trebalo uplatiti za 6 godišnjih isplata po 4.200 n.j. ako bi se prva suma primila 4 godine nakon uplate i ako se kamata obračunava godišnje po stopi 5% (d)? Pretpostaviti da su isplate: a) dekurzivne i b) anticipativne.

a) dekurzivne



$$U = 4.200 / V_5^6 \cdot \underline{\underline{11}}_5^3$$

b) anticipativne

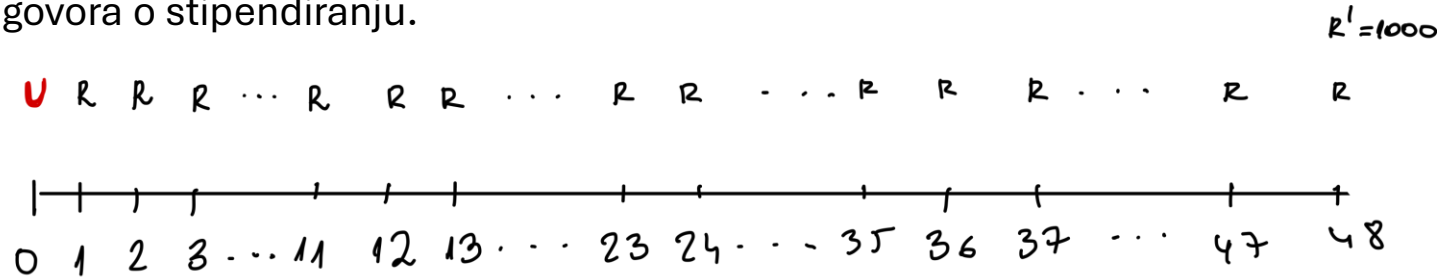


$$U = 4.200 (1 + V_5^6 - 1) \cdot \underline{\underline{11}}_5^4$$

Primjeri

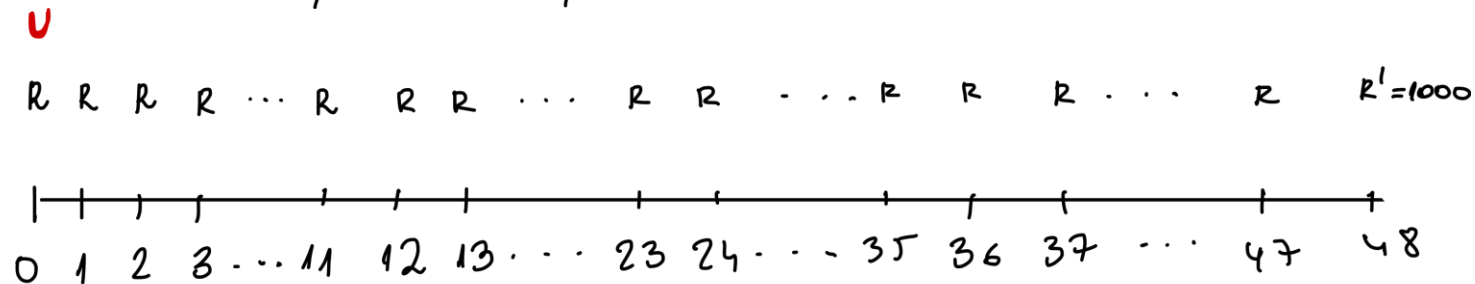
4. Ugovorom o stipendiranju, fond se obavezao da će stipendisti isplaćivati mjesečno, i to u toku 4 godine po 200 n.j. Pored toga, fond će isplatiti na ime nagrade 1.000 n.j. ako stipendista završi studije za 4 godine. Isplata treba da počne: a) jedan mjesec od dana potpisivanja ugovora i b) na dan potpisivanja ugovora. Fond je dinamičan i uvažava vremensku vrijednost novca, pa je godišnja kamatna stopa, uz mjesečni obračun, 12%. Izračunati vrijednost sredstava namijenjenih za stipendistu na dan potpisivanja ugovora o stipendiranju.

Jedan mjesec od dana potpisivanja ugovora (dekurzivno)



$$U = R \cdot V_{12/12}^{12 \cdot 4} + R' \cdot \overline{II}_{12/12}^{12 \cdot 4} = 200 \cdot V_1^{48} + 1000 \cdot \overline{II}_1^{48}$$

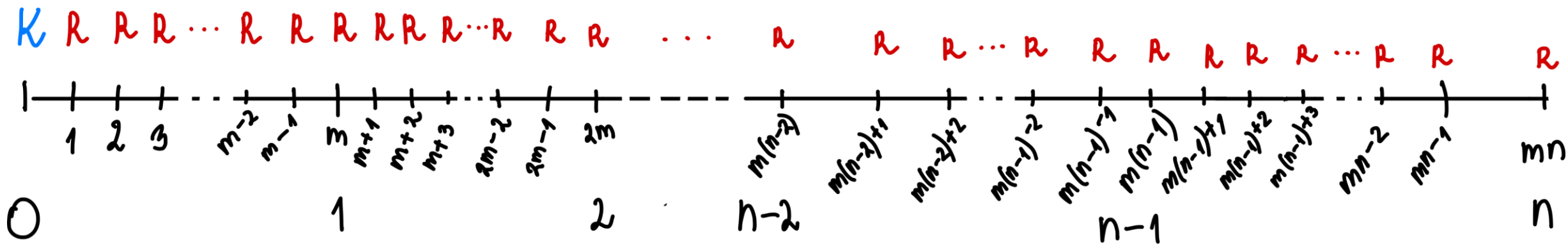
Na dan potpisivanja ugovora (anticipativno)



$$U = R \cdot (1 + V_{12/12}^{12 \cdot 4 - 1}) + R' \cdot \overline{II}_{12/12}^{12 \cdot 4} = 200 \cdot (1 + V_1^{47}) + 1000 \cdot \overline{II}_1^{48}$$

Period isplate < Period kapitalisanja

Dekurzivne isplate



$$K = R \cdot \frac{r_c^{mn} - 1}{r_c^{mn}(r_c - 1)}$$

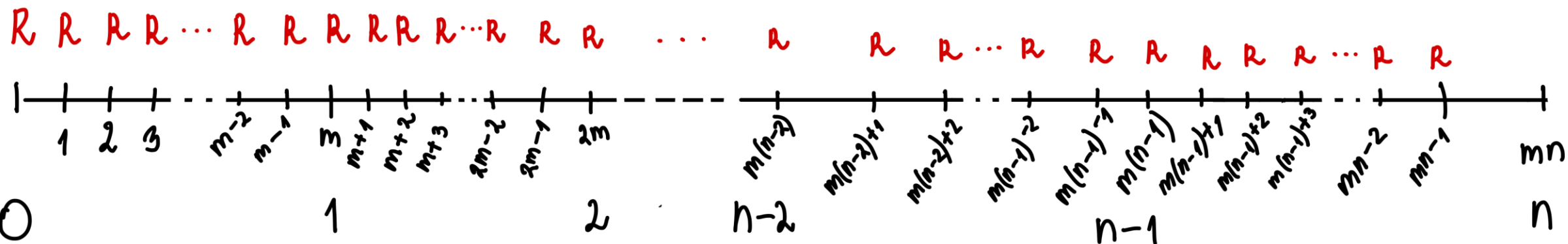
Metod konformne kamatne stope

$$K = R \cdot \left[m + \frac{p \cdot (m - 1)}{200} \right] \frac{r^n - 1}{r^n(r - 1)}$$

Metod kombinacije prostog i složenog kamatnog računa

Anticipativne isplate

K



$$K = R \cdot \frac{r_c \cdot (r_c^{mn} - 1)}{r^{mn}(r_c - 1)}$$

Metod konformne kamatne stope

$$K = R \cdot \left[m + \frac{p \cdot (m + 1)}{200} \right] \frac{r^n - 1}{r^n(r - 1)}$$

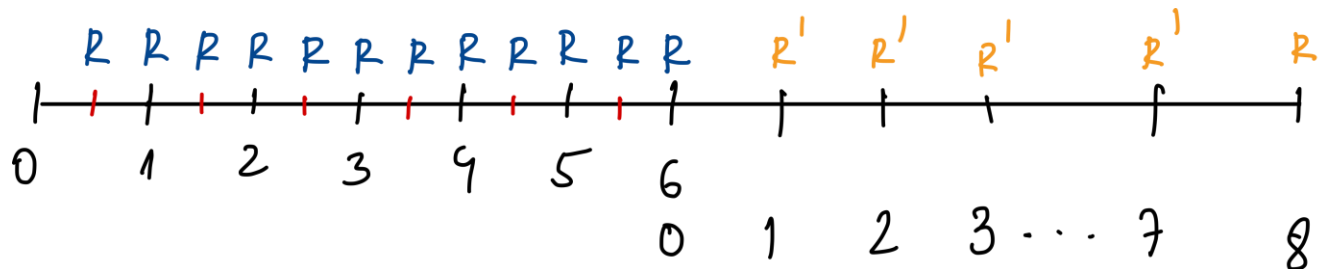
Metod kombinacije prostog i složenog kamatnog računa

Primjeri

5. Koliko osoba A treba da uplati danas da bi osigurala sebi jednaku kvartalnu postnumerando rentu koja će se isplaćivati 3 godine i nakon toga jednaku dekurzivnu polugodišnju rentu još 4 godine. Renta prve serije je veća od rente druge serije za 10%, odnosno za 140 n.j. Obračun kamate je polugodišnji po kamatnoj stopi od 12% p.a. (d), a prva renta druge serije se isplaćuje 6 mjeseci nakon posljednje rente prve serije.
6. Renta je isplaćivana u toku 10 godina na sljedeći način: prve 3 godine na kraju svakog tromjesečja po ... n.j, u toku naredne 4 na kraju svakog polugodišta, a posljednja renta u iznosu od 6.000 n.j. je isplaćena na kraju 10. godine. Kamatna stopa je 5%. Kolika je uplata za ove rente, ako se zna da je ona uplaćena 3 mjeseca prije isplate prve rente? Renta prve serije je manja od posljednje rente za 50%, a renta druge veća od rente prve za 20%. Postaviti model i definisati sve elemente.

Primjeri

5. Koliko osoba A treba da uplati danas da bi osigurala sebi jednaku kvartalnu postnumerando rentu koja će se isplaćivati 3 godine i nakon toga jednaku dekurzivnu polugodišnju rentu još 4 godine. Renta prve serije je veća od rente druge serije za 10%, odnosno za 140 n.j. Obračun kamate je polugodišnji po kamatnoj stopi od 12% p.a. (d), a prva renta druge serije se isplaćuje 6 mjeseci nakon posljednje rente prve serije.



$$i = 0,12$$

$$i_T = 0,06$$

$$R = 1,1R' \Rightarrow R = 1.540$$

$$R = 140 + R' \Rightarrow R' = 1.400$$

$$U = 1.540 \left[2 + \frac{6 \cdot (2-1)}{200} \right] / V_6^6 + 1.400 \cdot / V_6^8 \cdot \underline{11}_6^6$$

Metod kombinacije prostog i složenog kamatnog računa

$$r_c = \sqrt{1 + \frac{6}{100}}$$

$$U = 1.540 \cdot \frac{r_c^{mn} - 1}{r_c^{mn}(r_c - 1)} = 1.540 \cdot \frac{(1,02956)^{12} - 1}{(1,02956)^{12}(1,02956 - 1)}$$

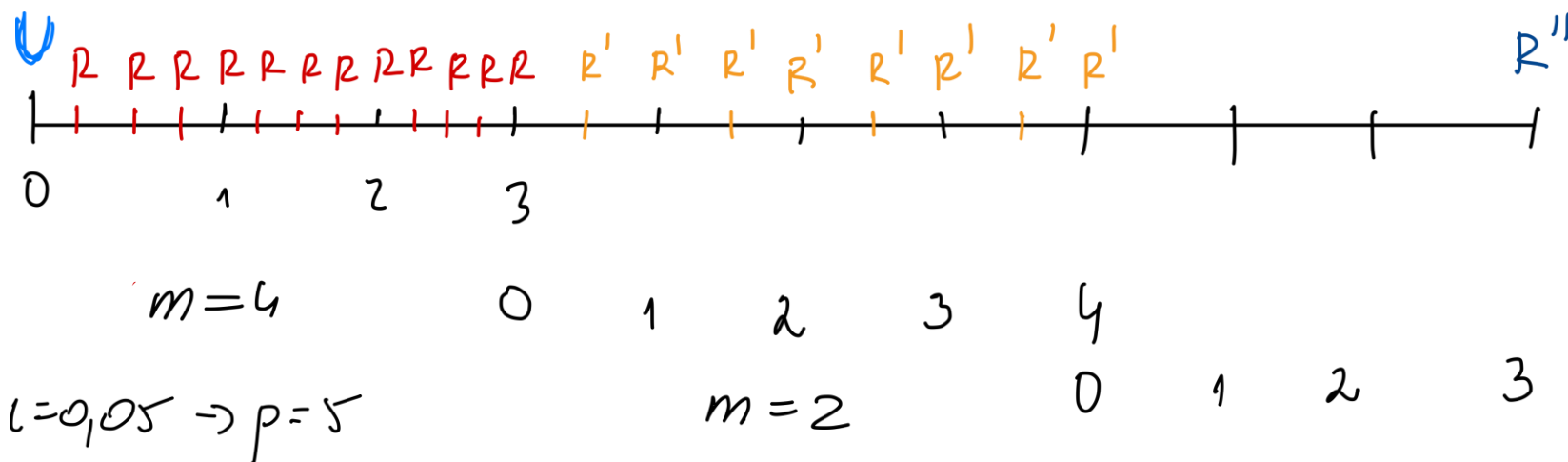
$$r_c = 1,02956 \Rightarrow p_c = 2,956$$

$$U = 1.540 \cdot / V_{p_c}^{mn} = 1.540 / V_{2,956}^{12}$$

Metod konformne kamatne stope

Primjeri

6. Renta je isplaćivana u toku 10 godina na sljedeći način: prve 3 godine na kraju svakog tromjesečja po ... n.j., u toku naredne 4 na kraju svakog polugodišta, a posljednja renta u iznosu od 6.000 n.j. je isplaćena na kraju 10. godine. Kamatna stopa je 5%. Kolika je uplata za ove rente, ako se zna da je ona uplaćena 3 mjeseca prije isplate prve rente? Renta prve serije je manja od posljednje rente za 50%, a renta druge veća od rente prve za 20%. Postaviti model i definisati sve elemente.



$$i = 0,05 \rightarrow p = 5$$

$$m = 2$$

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$$

$$U = R \left[4 + \frac{5 \cdot (4-1)}{200} \right] 1V_5^3 + R' \left[2 + \frac{5 \cdot (2-1)}{200} \right] 1V_5^4 \overline{II}_5^3 + R'' \cdot \overline{II}_5^{10}$$

$$U = 3.000 \left(4 + \frac{5 \cdot 3}{200} \right) 1V_5^3 + 3.600 \left(2 + \frac{5}{200} \right) 1V_5^4 \overline{II}_5^3 + 6.000 \overline{II}_5^{10}$$

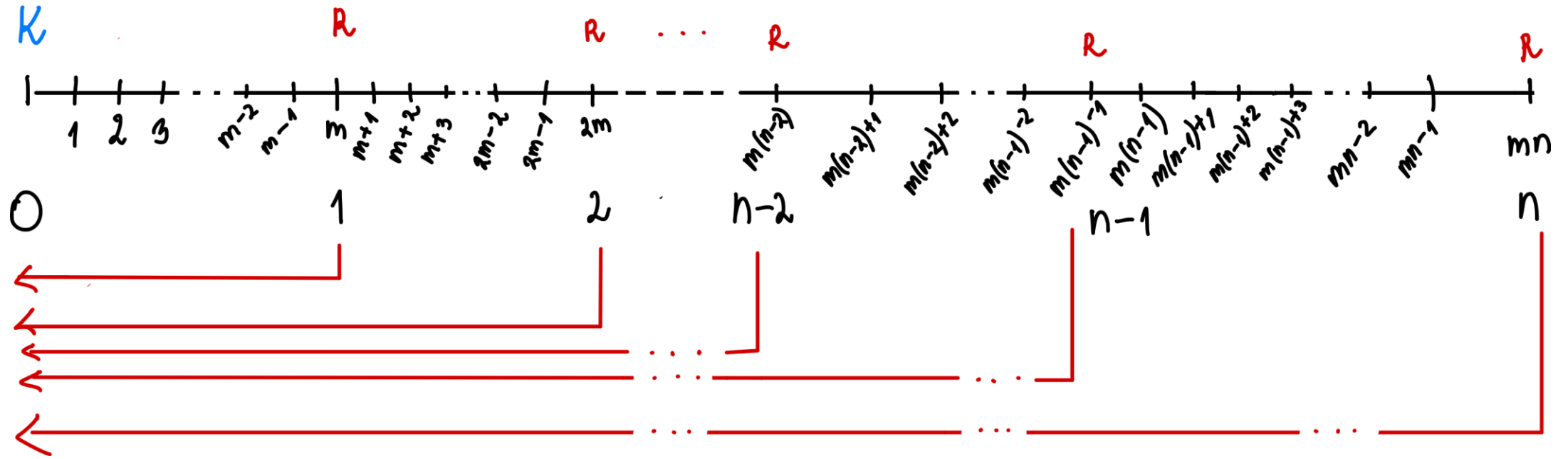
$$R = 0,5 R'' \Rightarrow R = 3.000$$

$$R' = 1,2 R \Rightarrow R' = 3.600$$

$$R'' = 6.000 \Rightarrow R'' = 6.000$$

Period isplate > Period kapitalisanja

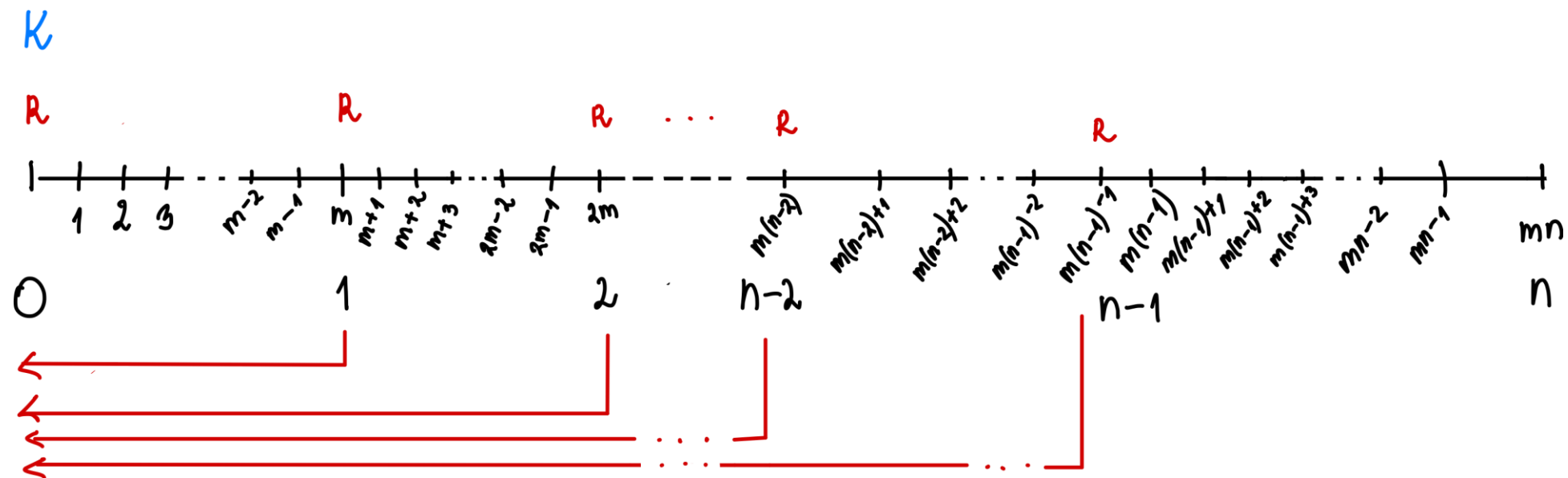
Dekurzivne isplate



$$K = R \cdot \frac{r^{mn} - 1}{r^{mn}(r^m - 1)}$$

Metod diskontovanja svake rente pojedinačno/
efektivne kamatne stope

Anticipativne isplate



$$K = R \cdot \frac{r^m \cdot (r^{mn} - 1)}{r^{mn} (r^m - 1)}$$

Metod diskontovanja svake rente pojedinačno/
efektivne kamatne stope

Primjeri

7. Investitor je tokom 5 godina ulagao po 300 KM svaka 3 mjeseca (na kraju svakog kvartala) u štedni račun kod banke koja obračunava kamatu polugodišnje (svakih 6 mjeseci). Nominalna godišnja kamatna stopa iznosi 6% uz polugodišnje kapitalisanje. Na kraju 5 godina, investitor odlučuje da podigne akumulirani iznos kroz sljedeće sukcesivne isplate:

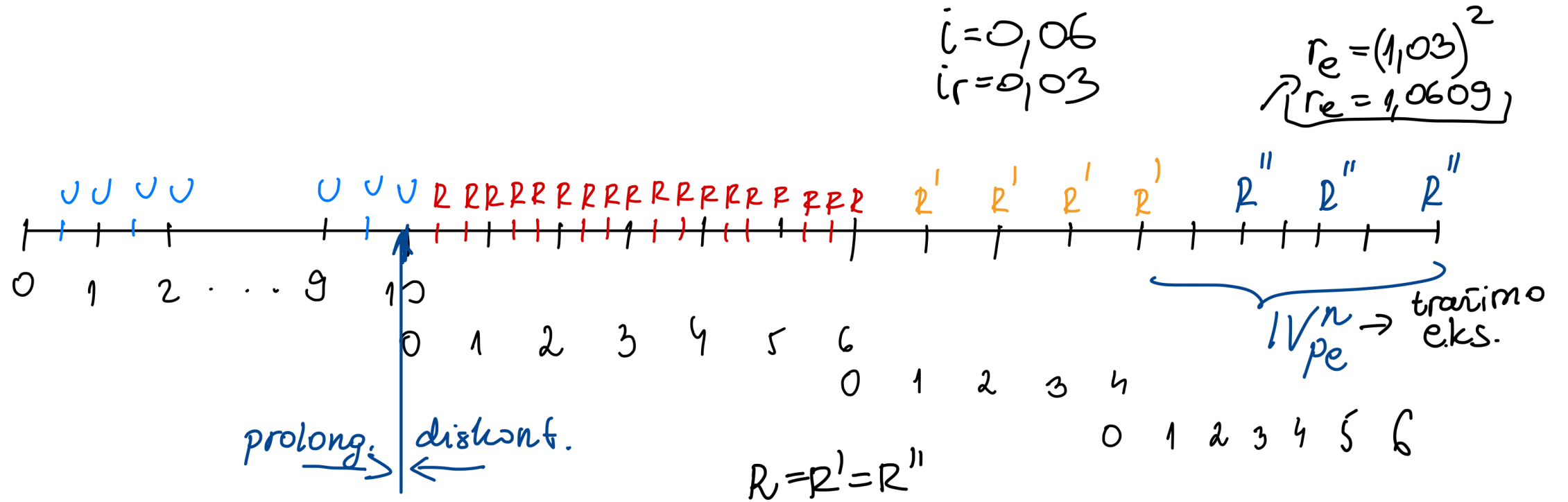
- Prve 3 godine: želi primati isplate svaka 2 mjeseca.
- Naredne 2 godine: želi primati isplate svakih 6 mjeseci
- Posljednje 3 godine: želi primati jednu isplatu godišnje

Pretpostavlja se da banka nastavlja obračunavati kamatu po istom sistemu kao i tokom faze štednje (polugodišnje kapitalisanje, 6%).

Postaviti model ekvivalencije. Koliko iznosi jedna renta?

Primjeri

7.



Primjeri

7.

$$U \left[2 + \frac{(2-1)3}{200} \right] (\overline{\text{III}}_3^{10-1} + 1) = R \left[3 + \frac{3(3-1)}{200} \right] IV_3^6 + R' \cdot IV_3^4 \cdot \overline{\text{II}}_3^6 + R'' \cdot IV_{6,09}^3 \cdot \overline{\text{II}}_3^{10}$$

$$300 \left(2 + \frac{3}{200} \right) (\overline{\text{III}}_3^9 + 1) = R \left(3 + \frac{3 \cdot 2}{200} \right) IV_3^6 + R IV_3^4 \overline{\text{II}}_3^6 + R IV_{6,09}^3 \overline{\text{II}}_3^{10}$$

$$300 \left(2 + \frac{3}{200} \right) (\overline{\text{III}}_3^9 + 1) = R \left[\left(3 + \frac{6}{200} \right) IV_3^6 + IV_3^4 \overline{\text{II}}_3^6 + IV_{6,09}^3 \overline{\text{II}}_3^{10} \right]$$

$$R = 300 \frac{\left(2 + \frac{3}{200} \right) (\overline{\text{III}}_3^9 + 1)}{\left(3 + \frac{6}{200} \right) IV_3^6 + IV_3^4 \overline{\text{II}}_3^6 + IV_{6,09}^3 \overline{\text{II}}_3^{10}}$$

Aritmetička i geometrijska progresija

Aritmetička progresija

Dekurzivno

$$K = R_1 \cdot IV_p^n \pm \frac{100 \cdot d}{p} \cdot \left[IV_p^n - \frac{n}{r^n} \right] \quad \text{ili}$$

$$K = R_1 \cdot IV_p^n \pm \frac{100 \cdot d}{p} \cdot [IV_p^n - n \cdot II_p^n]$$

Anticipativno

$$K = R_1 \cdot (1 + IV_p^n) \pm \frac{100 \cdot d}{p} \cdot [(1 + IV_p^n) - n \cdot II_p^n]$$

Geometrijska progresija

Dekurzivno

$$K = R_1 \cdot \frac{r^n - q^n}{r^n \cdot (r - q)}$$

$$r = q$$

tada

$$K = R_1 \cdot n \cdot II_p^n$$

Anticipativno

$$K = R_1 \cdot \frac{r \cdot (r^n - q^n)}{r^n \cdot (r - q)}$$

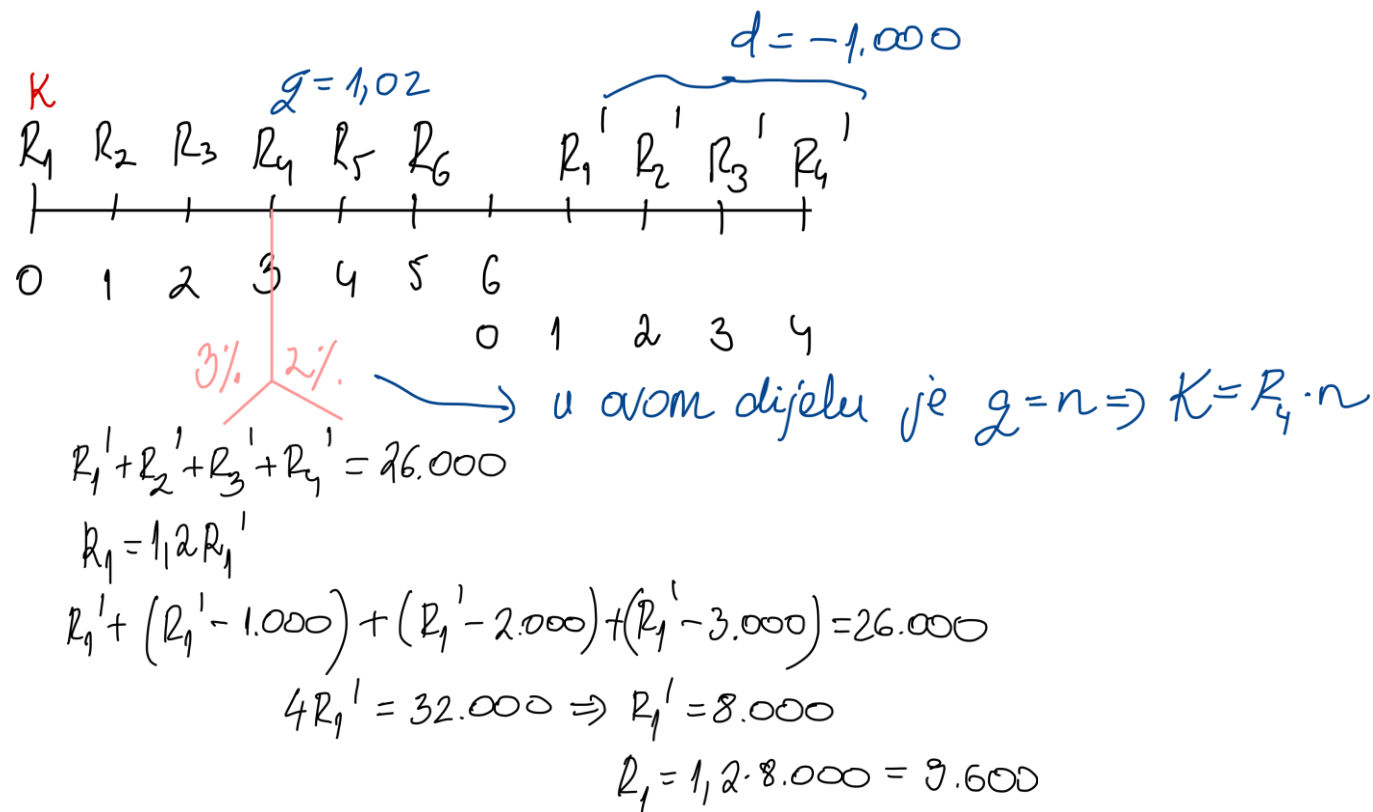
$$r = q$$

tada

$$K = R_1 \cdot n$$

Primjeri

8. Renta je isplaćivana u toku 10 godina na sljedeći način: u toku prvih 6 godina rente su isplaćivane početkom svake godine i konstantno su se povećavale za 2%. Nakon toga, naredne 4 godine rente su isplaćivane krajem svake godine i konstantno su se smanjivale za 1.000 n.j. Potrebno je izračunati sadašnju vrijednost ovih renti ukoliko je kamatna stopa u toku prve 3 godine bila 3% (d), a nadalje 2% (d) i ukoliko je zbir renti druge serije 26.000 n.j, a prva renta prve serije za 20% veća od prve rente druge serije.



Primjeri

8. Renta je isplaćivana u toku 10 godina na sljedeći način: u toku prvih 6 godina rente su isplaćivane početkom svake godine i konstantno su se povećavale za 2%. Nakon toga, naredne 4 godine rente su isplaćivane krajem svake godine i konstantno su se smanjivale za 1.000 n.j. Potrebno je izračunati sadašnju vrijednost ovih renti ukoliko je kamatna stopa u toku prve 3 godine bila 3% (d), a nadalje 2% (d) i ukoliko je zbir renti druge serije 26.000 n.j, a prva renta prve serije za 20% veća od prve rente druge serije.

$$\begin{aligned}
 & \text{1. serija do promjene k.s.} \qquad \text{1. serija nakon promjene k.s.} \\
 K = & 9.600 \cdot \frac{1,03/1,03^3 - 1,02^3}{1,03^3(1,03 - 1,02)} + \underbrace{9.600 \cdot 1,02^3}_{R_4} \cdot \underbrace{3}_{n} \cdot \overline{\Pi}_3^3 \\
 & + \underbrace{\left[R_1 \cdot IV_2^4 - \frac{100 \cdot 1000}{2} \cdot \left(IV_2^4 - 4 \cdot \overline{\Pi}_2^4 \right) \right]}_{\text{2. serija}} \underbrace{\overline{\Pi}_2^3}_{\text{po jednoj stopi}} \underbrace{\overline{\Pi}_3^3}_{\text{po drugoj stopi}}
 \end{aligned}$$