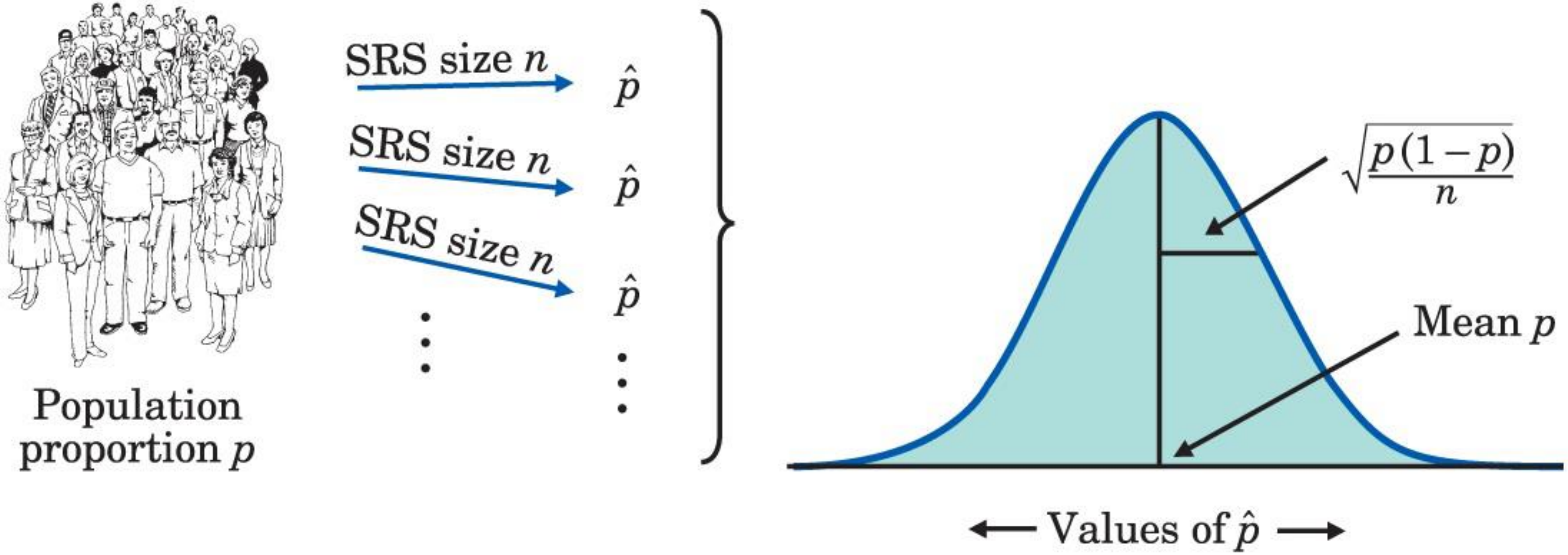
Osnovni koraci u inferencijalnoj statistici:

1. Prikupljanje podataka: Prvi korak je prikupljanje podataka iz uzorka koji je reprezentativan za populaciju. Uzorak treba biti dovoljno velik da bi zaključci bili pouzdani.
2. Deskriptivna statistika: Prije nego što pređemo na inferencijalnu statistiku, koristimo deskriptivnu statistiku da sumiramo i opišemo podatke iz uzorka. To uključuje izračunavanje srednje vrijednosti, medijane, standardne devijacije, itd.
3. Formulacija hipoteza: Postavljamo hipoteze koje želimo testirati. Na primjer, možemo postaviti hipotezu da određeni postotak zaposlenih žena ima fakultetsku diplomu.
4. Testiranje hipoteza: Koristimo statističke testove (npr. t-test, chi-square test) da bismo testirali naše hipoteze. Ovi testovi nam pomažu da utvrdimo jesu li naši zaključci statistički značajni.
5. Intervali povjerenja: Izračunavamo intervale povjerenja koji nam daju opseg vrijednosti unutar kojeg se očekuje da se nalazi pravi parametar populacije. Na primjer, možemo izračunati interval povjerenja za postotak zaposlenih žena s fakultetskom diplomom.
6. Zaključivanje: Na temelju rezultata testova hipoteza i intervala povjerenja donosimo zaključke o populaciji. Na primjer, možemo zaključiti da određeni postotak zaposlenih žena ima fakultetsku diplomu ili da je srednje vrijeme preživljavanja za pacijente s određenom vrstom raka određeni broj mjeseci.

Primjeri:

- Procjena postotka zaposlenih žena s fakultetskom diplomom: Ako imamo uzorak od 1000 zaposlenih žena i 600 od njih ima fakultetsku diplomu, možemo koristiti inferencijalnu statistiku da procijenimo da oko 60% zaposlenih žena u populaciji ima fakultetsku diplomu.
- Srednje vrijeme preživljavanja za pacijente s određenom vrstom raka: Ako imamo podatke o preživljavanju 200 pacijenata s određenom vrstom raka, možemo koristiti inferencijalnu statistiku da procijenimo srednje vrijeme preživljavanja za sve pacijente s tom vrstom raka.



SRS size n
SRS size n
SRS size n
$\hat{p}$
$\hat{p}$
$\hat{p}$
Population proportion p
$\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$
Mean p
Values of $\hat{p}$

Interval pouzdanosti - proporcije

Interval pouzdanosti nam omogućava da procenimo proporciju uspeha u populaciji na osnovu proporcije uspeha u uzorku. Evo kako to funkcioniše:

1. **Proporcija uspeha u uzorku ($\hat{p}$)**: Ovo je odnos uspeha u uzorku. Na primer, ako imamo uzorak od 100 ljudi i 40 od njih su zaposleni, proporcija uspeha $\hat{p}$ je 0.40.
2. **Distribucija uzorkovanja $\hat{p}$**: Kada uzmemo mnogo uzoraka iste veličine iz iste populacije, proporcija uspeha $\hat{p}$ će varirati od uzorka do uzorka. Ova varijabilnost nije slučajna, već prati obrazac koji je približno normalan ako je veličina uzorka dovoljno velika.
3. **Srednja vrednost distribucije uzorkovanja $\hat{p}$**: Srednja vrednost distribucije uzorkovanja $\hat{p}$ je stvarna proporcija uspeha u populaciji, označena kao p.
4. **Standardna devijacija distribucije uzorkovanja $\hat{p}$**: Standardna devijacija ($\sigma_{\hat{p}}$) distribucije uzorkovanja $\hat{p}$ se izračunava kao:

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

gde je p stvarna proporcija uspeha u populaciji, a n veličina uzorka.

Izračunavanje intervala pouzdanosti

Da bismo izračunali interval pouzdanosti za proporciju uspeha, koristimo sledeću formulu:

$$\hat{p} \pm Z \cdot \sigma_{\hat{p}}$$

gde je Z vrednost Z-score koja odgovara željenom nivou pouzdanosti (npr. za 95% pouzdanost, $Z \approx 1.96$).

Pretpostavimo da želimo proceniti proporciju zaposlenih u populaciji. Imamo uzorak od 100 ljudi, od kojih je 40 zaposleno ($\hat{p} = 0.40$). Želimo izračunati 95% interval pouzdanosti.

1. **Izračunavanje standardne devijacije:**

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{0.40 \cdot (1 - 0.40)}{100}} = \sqrt{\frac{0.40 \cdot 0.60}{100}} = \sqrt{0.0024} \approx 0.049$$

2. **Izračunavanje intervala pouzdanosti:**

$$0.40 \pm 1.96 \cdot 0.049$$

$$0.40 \pm 0.096$$

   Dakle, 95% interval pouzdanosti za proporciju zaposlenih je od 0.304 do 0.496.

Primjer

Pretpostavke

- **Proporcija uspjeha u populaciji (p):** 0.215 (21.5% apsolvenata planira da pohađa diplomske/master ili profesionalne/specijalističke studije).
- **Veličina uzorka (n):** 23,915.

Distribucija uzorkovanja proporcije uspjeha ($\hat{p}$)

Kada uzmemo mnogo uzoraka iste veličine iz iste populacije, proporcija uspjeha $\hat{p}$ će varirati od uzorka do uzorka. Ova varijabilnost slijedi obrazac koji je približno normalan zbog velike veličine uzorka.

Srednja vrijednost distribucije uzorkovanja $\hat{p}$

Srednja vrijednost distribucije uzorkovanja $\hat{p}$ je stvarna proporcija uspjeha u populaciji, označena kao p:

$$\text{Srednja vrijednost} = p = 0.215$$

Standardna greška distribucije uzorkovanja $\hat{p}$

Standardna greška ($\sigma_{\hat{p}}$) se izračunava kao:

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0.215 \cdot (1 - 0.215)}{23,915}} = \sqrt{\frac{0.215 \cdot 0.785}{23,915}} = \sqrt{0.00672775/23,915} \approx 0.0026$$

Interval povjerenja

Koristimo 95% interval povjerenja, što znači da će 95% svih ishoda uzorka pasti unutar dva standardna odstupanja od srednje vrijednosti. Dakle, interval povjerenja se izračunava kao:

$$0.215 \pm 1.96 \cdot \sigma_{\hat{p}}$$

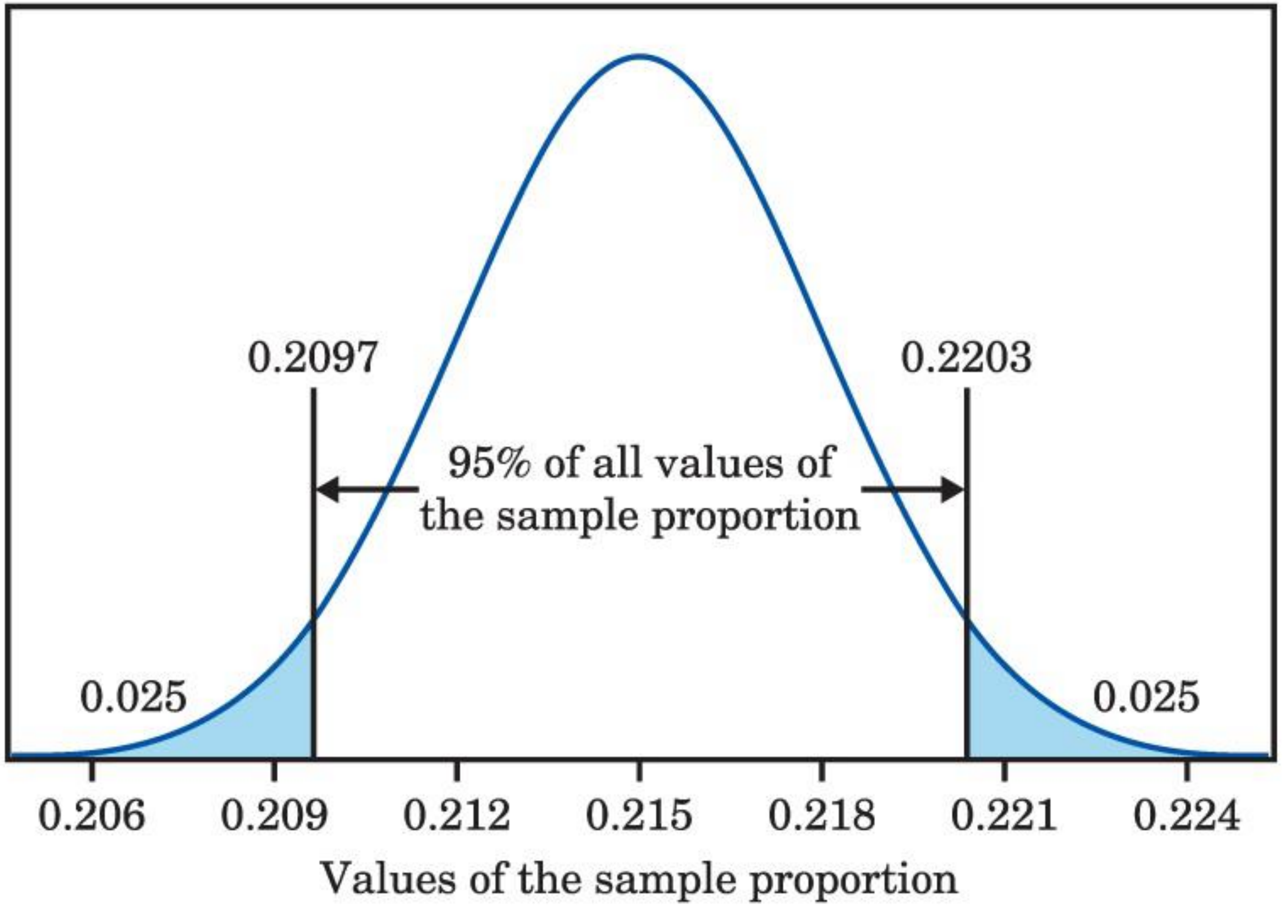
$$0.215 \pm 1.96 \cdot 0.0026565 \approx 0.215 \pm 0.0052$$

Granice intervala povjerenja

Dakle, 95% interval povjerenja za proporciju uspjeha je:

$$0.215 - 0.0052 = 0.2098$$

$$0.215 + 0.0052 = 0.2202$$



Moore/Notz, *Statistics: Concepts and Controversies*, 10e,
© 2020 W. H. Freeman and Company

Primjer 1: Proporcija pušača

Pretpostavimo da je istina da 18% odraslih u jednoj zemlji puši. Dakle, imamo (p = 0.18). Uzorak veličine (n = 5,000) bi, ako bi se ponovio mnogo puta, proizveo uzorak proporcije koje blisko prate normalnu distribuciju, sa:

- **Srednjom vrijednošću**: (0.18)

- **Standardnom greškom**: (0.0054)

Središte ove normalne distribucije je stvarna proporcija pušača u populaciji. Standardna greška je mala jer je uzorak prilično velik. Dakle, skoro svi uzorci će proizvesti statistiku koja je bliska pravom (p). Prema pravilu 68–95–99.7, 95% svih ishoda uzorka će pasti između:

0.18 - 0.0106 = 0.1694

0.18 + 0.0106 = 0.1906

Primjer 2: Proporcija vakcinisanih

Pretpostavimo da je istina da 75% djece u jednoj zemlji primilo sve preporučene vakcine. Dakle, imamo (p = 0.75). Uzorak veličine (n = 10,000) bi, ako bi se ponovio mnogo puta, proizveo uzorak proporcije koje blisko prate normalnu distribuciju, sa:

- **Srednjom vrijednošću**: (0.75)
- **Standardnom greškom**: (0.0137)

Središte ove normalne distribucije je stvarna proporcija vakcinisanih u populaciji. Standardna greška je mala jer je uzorak prilično velik. Dakle, skoro svi uzorci će proizvesti statistiku koja je bliska pravom (p). Prema pravilu 68–95–99.7, 95% svih ishoda uzorka će pasti između:

0.75 - 0.027 = 0.723

0.75 + 0.027 = 0.777

Primjer 3: Proporcija zadovoljnih kupaca

Pretpostavimo da je istina da 60% kupaca u jednoj trgovini zadovoljno uslugom. Dakle, imamo (p = 0.60). Uzorak veličine (n = 2,500) bi, ako bi se ponovio mnogo puta, proizveo uzorak proporcije koje blisko prate normalnu distribuciju, sa:

- **Srednjom vrijednošću**: (0.60)
- **Standardnom greškom**: (0.0098)

Središte ove normalne distribucije je stvarna proporcija zadovoljnih kupaca u populaciji. Standardna greška je mala jer je uzorak prilično velik. Dakle, skoro svi uzorci će proizvesti statistiku koja je bliska pravom (p). Prema pravilu 68–95–99.7, 95% svih ishoda uzorka će pasti između:

0.60 - 0.0192 = 0.5808

0.60 + 0.0192 = 0.6192

Primjer 4: Proporcija korisnika interneta

Pretpostavimo da je istina da 85% stanovnika jedne zemlje koristi internet. Dakle, imamo (p = 0.85). Uzorak veličine (n = 15,000) bi, ako bi se ponovio mnogo puta, proizveo uzorak proporcije koje blisko prate normalnu distribuciju, sa:

- **Srednjom vrijednošću**: (0.85)
- **Standardnom greškom**: (0.0092)

Središte ove normalne distribucije je stvarna proporcija korisnika interneta u populaciji. Standardna greška je mala jer je uzorak prilično velik. Dakle, skoro svi uzorci će proizvesti statistiku (\hat{p}) koja je bliska pravom (p). Prema pravilu 68–95–99.7, 95% svih ishoda uzorka će pasti između:

0.85 - 0.018 = 0.832

0.85 + 0.018 = 0.868

Razumjevanje intervala pouzdanosti

Intervali povjerenja koriste centralnu ideju vjerovatnoće: pitajte šta bi se dogodilo kada bismo uzorkovanje ponovili mnogo puta. 95% u intervalu povjerenja od 95% je vjerovatnoća, vjerovatnoća da metoda proizvodi interval koji bilježi pravi parametar.

Primjer: Proporcija apsolvenata

Uzorak NSSE-a od 23,915 apsolvenata otkrio je da je 5,038 prijavilo planove da ide na postdiplomske ili profesionalne škole, tako da je proporcija uzorka bila:

$$\hat{p} = \frac{5038}{23915} = 0.211$$

Interval povjerenja je bio 95%:

$$0.211 \pm 0.0053$$

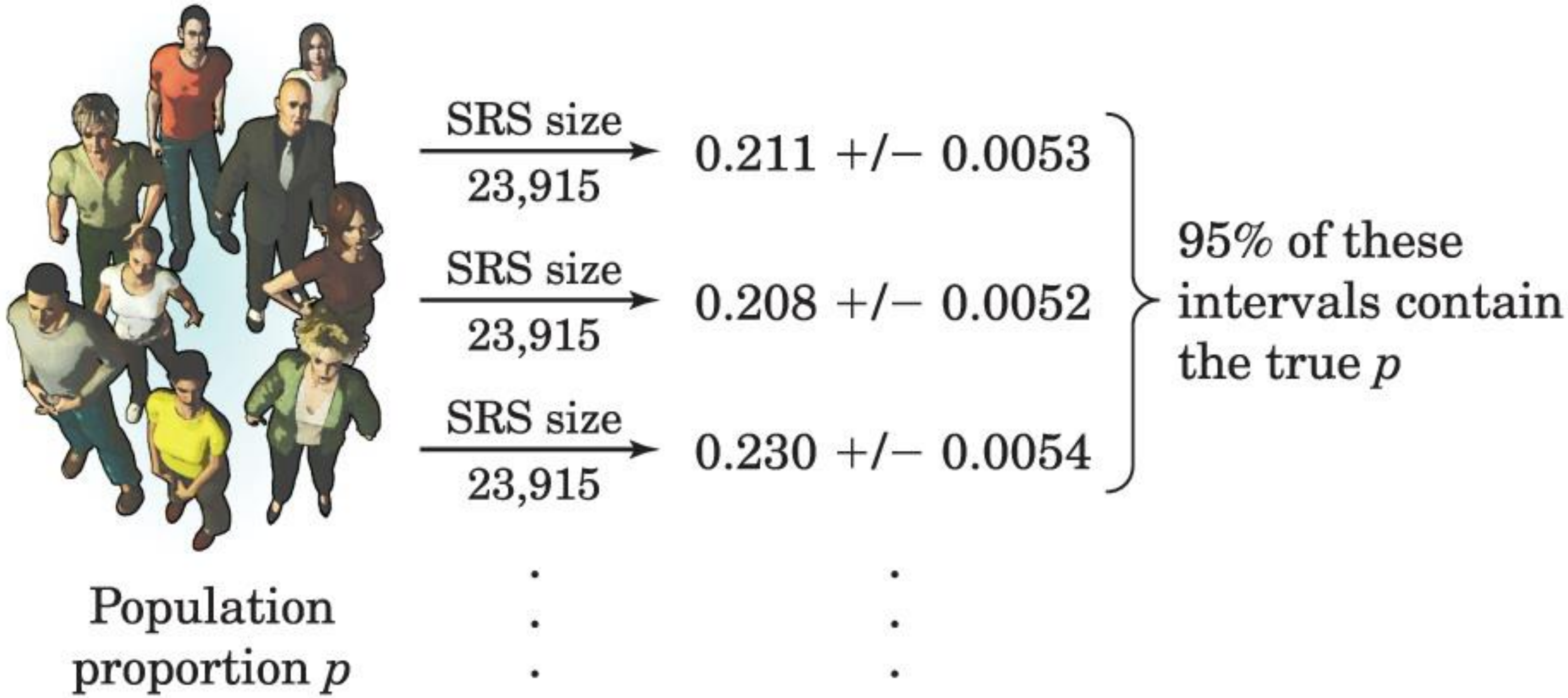
Drugi uzorak iz iste populacije

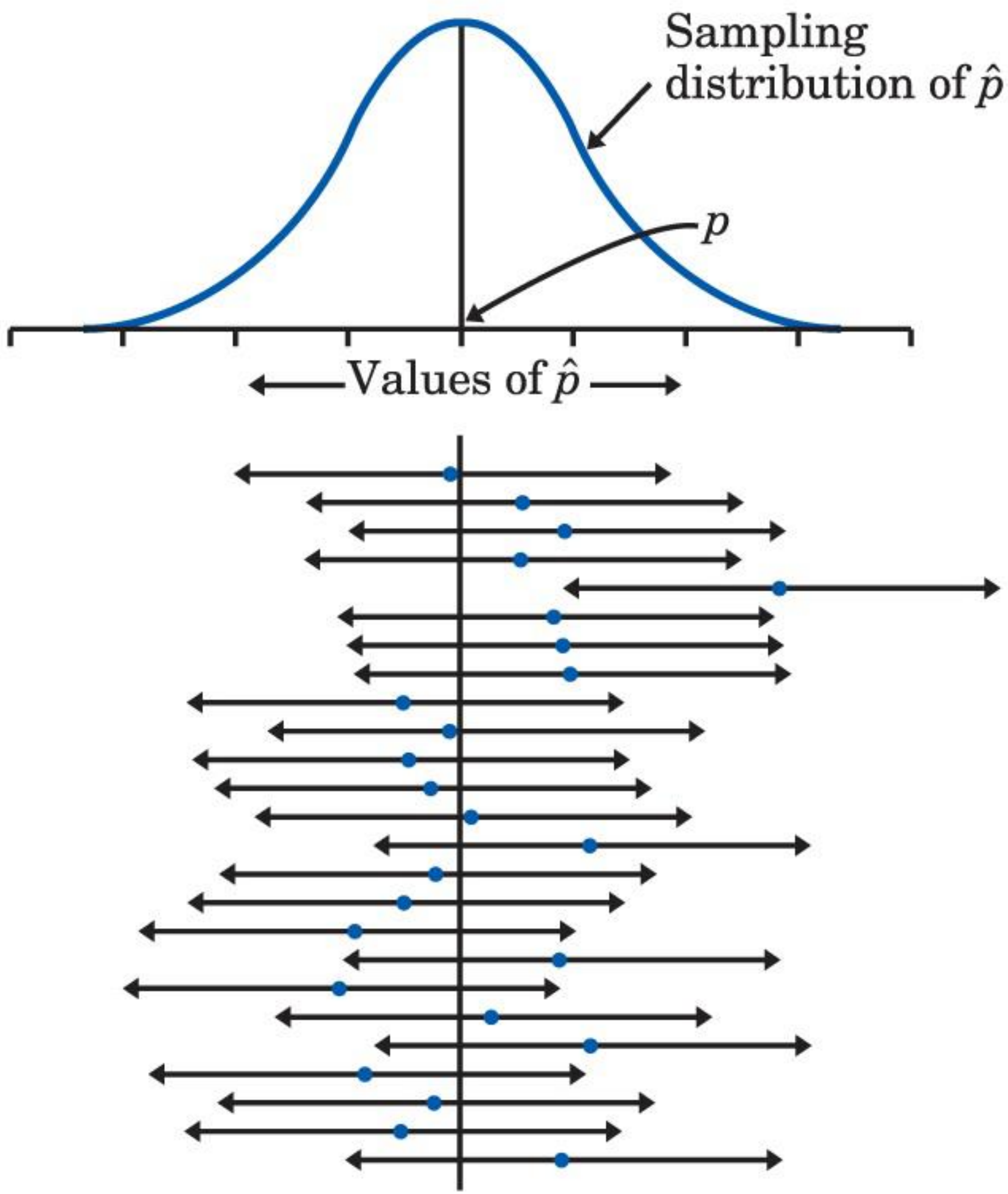
Izvucite drugi uzorak iz iste populacije. Utvrđuje se da 4,976 od 23,915 ispitanika planira da pohađa postdiplomske ili profesionalne škole. Interval povjerenja je:

$$0.208 \pm 0.0052$$

Pravilo 68–95–99.7

Koristili smo 95 dio pravila 68–95–99.7 da bismo dobili interval povjerenja od 95% za proporciju stanovništva. Možda mislite da metoda koja radi 95% vremena nije dovoljno dobra. Želite biti 99% sigurni. Za to moramo označiti centralnih 99% normalne distribucije.


SRS size
23,915
0.211 +/− 0.0053
SRS size
23,915
0.208 +/− 0.0052
SRS size
23,915
0.230 +/− 0.0054
95% of these intervals contain the true p
Population proportion p


Sampling
distribution of $\hat{p}$
p
Values of $\hat{p}$

Distribucija uzorkovanja srednje vrijednosti uzorka

Osnovni koncepti

1. **Odabir SRS-a:** Odaberite SRS (jednostavni nasumični uzorak) veličine n iz populacije u kojoj pojedinci imaju srednju vrijednost μ i standardnu devijaciju σ.
2. **Srednja vrijednost uzorka ($\bar{x}$):** Srednja vrijednost uzorka $\bar{x}$ je približno normalna kada je veličina uzorka n velika.
3. **Srednja vrijednost distribucije uzorkovanja:** Srednja vrijednost distribucije uzorkovanja za $\bar{x}$ je jednaka μ .
4. **Standardna devijacija (standardna greška):** Standardna devijacija ili standardna greška distribucije uzorkovanja $\bar{x}$ je $\sigma/\sqrt{n}$.

Procjena srednje vrijednosti populacije

- **Srednja vrijednost populacije (μ):** Da bismo razlikovali srednju vrijednost populacije (parametar) od srednje vrijednosti uzorka $\bar{x}$, srednju vrijednost populacije pišemo kao μ (grčko slovo mu).
- **Procjena μ:** Koristimo srednju vrijednost $\bar{x}$ SRS-a da procijenimo nepoznatu srednju vrijednost μ populacije.

Distribucija uzorkovanja $\bar{x}$

- **Normalna distribucija:** Srednja vrijednost uzorka $\bar{x}$ iz velikog SRS-a ima distribuciju uzorkovanja koja je bliska normalnoj.
- **Nepristrasna procjena:** Budući da je srednja vrijednost uzorka SRS-a nepristrasna procjena vrijednosti μ, distribucija uzorkovanja $\bar{x}$ ima μ kao srednju vrijednost.
- **Standardna greška**: Standardna devijacija, ili standardna greška, $\bar{x}$ zavisi od standardne devijacije populacije σ.

Centralna granična teorema

- **Teorema**: Centralna granična teorema kaže da kako uzimamo sve više i više nasumičnih zapažanja iz bilo koje populacije, distribucija srednje vrijednosti ovih zapažanja se na kraju približava normalnoj distribuciji.
- **Praktična primjena**: Centralna granična teorema leži iza upotrebe normalnih distribucija uzorkovanja za srednje vrijednosti uzorka.

Interval povjerenja za srednju vrijednost populacije

Formula za interval povjerenja

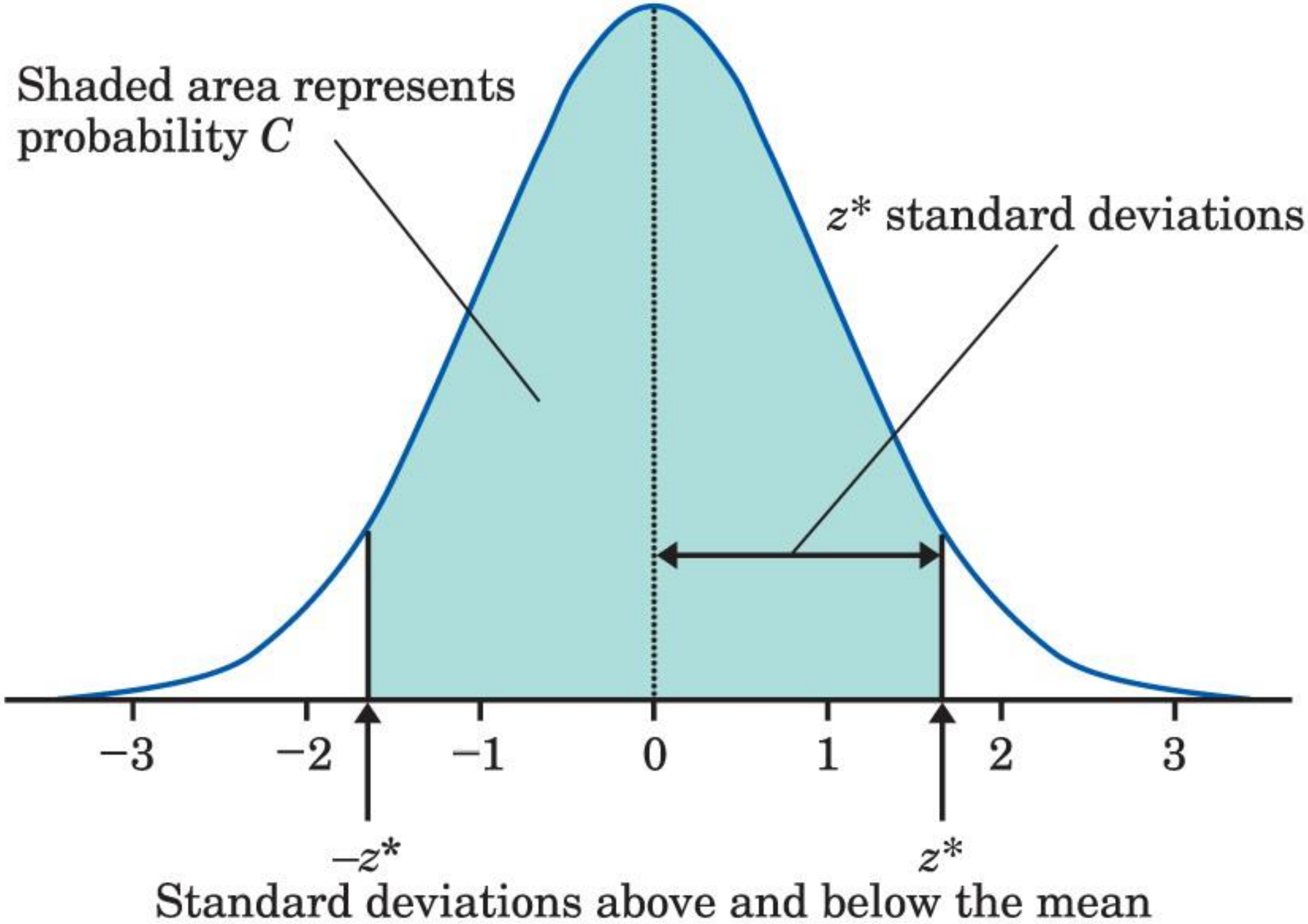
Odaberite SRS veličine n iz velike populacije pojedinaca koji imaju srednju vrijednost μ. Srednja vrijednost opservacija uzorka je $\bar{x}$. Kada je n razumno veliko, približan interval povjerenja nivoa C za μ je:

$$\bar{x} \pm z^* \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

gdje je z^* kritična vrijednost za nivo pouzdanosti C (tablična vrijednost).

Standardna greška

- **Standardna greška $\bar{x}$**: Zavisi i od veličine uzorka n i od standardne devijacije σ pojedinaca u populaciji.
- **Procjena σ**: Kada je n veliko, standardna devijacija uzorka s je blizu σ i može se koristiti za procjenu, baš kao što koristimo srednju vrijednost uzorka $\bar{x}$ za procjenu srednje vrijednosti populacije μ.
- **Procijenjena standardna greška**: $\frac{s}{\sqrt{n}}$.



Shaded area represents probability C
z^* standard deviations
−3
−2
−1
0
1
2
3
$-z^*$
z^*
Standard deviations above and below the mean

Primjer: Nacionalna procjena obrazovnog napretka (NAEP)

Podaci

- **Test iz matematike za maturante:** Rezultati na testu se kreću od 0 do 300.
- **Uzorak:** Godine 2015. NAEP je nasumično odabrao 13,200 maturanata u srednjoj školi koji su polagali test iz matematike.
- **Prosječni rezultat:** $\bar{x} = 152$
- **Standardna devijacija rezultata:** $s = 34$

Izračunavanje intervala povjerenja

Pretpostavimo da je ovih 13,200 učenika bilo slučajni uzorak iz populacije svih učenika 12. razreda. Na osnovu ovog uzorka, šta možemo reći o srednjem rezultatu μ u populaciji svih učenika 12. razreda?

- **Interval povjerenja od 95% za** μ koristi kritičnu vrijednost $z^* = 1.96$:

$$\bar{x} \pm z^* \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 152 \pm 1.96 \cdot \frac{34}{\sqrt{13,200}} = 152 \pm 0.58$$