Потрошачки кредити

Модели отплате у фиксним и промијењеним условима

Андреј Шева, асистент

2025/2026 • Финансијска математика — Вјежбе 4

andrej.seva@ef.unibl.org

Консултације: уторком и четвртком 10–12h (кабинет 401) уз претходну најаву

Потрошачки кредити — основни појмови

Појам: (углавном) краткорочна форма зајма, примјењује се прост каматни рачун

- Уговорни однос између дужника и повјериоца којим се дужник обавезује да ће повјериоцу, за одобрени намјенски кредит, плаћати износе у једнаким временским интервалима, који се састоје од отплате (b) и обрачунате камате (I)

Модели отплате:

- Модели отплате потрошачког кредита у фиксним првобитно уговореним условима
- Модели отплате потрошачког кредита у промијењеним првобитно уговореним условима

Потрошачки кредити — битни појмови

Означавање:

- a — мјесечна рата (износ који дужник враћа сваки мјесец)
- b — мјесечна отплата (дио отплате главнице садржан у рати)
- I — мјесечна камата (дио камате садржан у рати)
- K — износ кредита
- m — број мјесеци отплате

Основне формуле:

$$a = b + I$$

$$b = \frac{K}{m}$$

$$\sum I = \frac{K \cdot i \cdot (m+1)}{24}$$

$$a = b + \frac{\sum I}{m} = \frac{K + \sum I}{m}$$

Модели отплате у фиксним условима

Декурзивне (чешће коришћене) и **антиципативне** (ријетко коришћене) отплате

- Једнаке декурзивне/антиципативне отплате
- Варијабилне декурзивне/антиципативне отплате

Једнаке декурзивне отплате — формуле

Формуле:

$$a = b + I$$

$$b = \frac{K}{m}$$

$$\sum I = \frac{K \cdot i \cdot (m+1)}{24}$$

$$a = b + \frac{\sum I}{m} = \frac{K + \sum I}{m}$$

Карактеристике:

- Отплате су једнаке: $b_1 = b_2 = \ldots = b_m$
- Камата се обрачунава на остатак дуга
- Рате опадају током отплате

Примјер — Амортизациони план

Задатак: Потрошачки зајам од 6.000 KM је одобрен на 12 мјесеци уз каматну стопу од 10%. Израдити амортизациони план на бази планиране камате. ($b_1 = b_2 = \ldots = b_{12}$)

Период	Остатак дуга	Камата	Отплата	Рата
0	6.000,00			
1	5.500,00	50,00	500,00	550,00
2	5.000,00	45,83	500,00	545,83
3	4.500,00	41,67	500,00	541,67
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
11	500,00	8,33	500,00	508,33
12	0,00	4,17	500,00	504,17
$\sum$		325,00	6.000,00	6.325,00

Објашњење амортизационог плана

Поступак израде:

1. Креће се са номиналним износом дуга (кредита) у нултом периоду
2. На крају првог мјесеца дуг се умањује за константну отплату ($b = 500$)
3. На остатак дуга из претходног реда обрачунава се мјесечна камата ($0{,}1 \cdot \frac{1}{12}$) и записује се у наредни ред
4. Камата се додаје константној отплати и даје износ рате на крају мјесеца

За други мјесец: Узима се константна отплата од 500, одузима се од остатка дуга из претходног реда (5.500), да би се добио остатак дуга (5.000). На тај остатак зарачунава се мјесечна камата (45,83) која се додаје константној отплати.

Примјер 2 — Израчунавање рате

Задатак: Одобрен је потрошачки кредит за робу у вриједности од 30.000 KM. Кредит се отплаћује у року од 18 мјесеци једнаким мјесечним декурзивним ратама, уз каматну стопу од 12%. Израчунати износ мјесечне рате.

Рјешење:

$$b = \frac{K}{m} = \frac{30.000}{18} = 1.666{,}67$$

$$\sum I = \frac{K \cdot i \cdot (m+1)}{24} = \frac{30.000 \cdot 0{,}12 \cdot (18+1)}{24} = 2.850$$

$$a = b + \frac{\sum I}{m} = 1.666{,}67 + \frac{2.850}{18} = 1.825 \text{ KM}$$

Примјер 3 — Тражење броја мјесеци

Задатак: Потрошачки кредит у износу од 13.714,28 н.ј. одобрен је на m мјесеци уз каматну стопу од 10%. Камата за првих 7 мјесеци отплаћивања кредита износи 700 н.ј. На колико мјесеци је одобрен кредит?

Дато: $K = 13.714{,}28$, $i = 0{,}01$, $\sum_{s=1}^{7} I_s = 700$

Рјешење:

$$\sum_{s=1}^{7} I_s = b \cdot i \cdot \frac{m}{12} + b \cdot i \cdot \frac{m-1}{12} + b \cdot i \cdot \frac{m-2}{12} + \ldots + b \cdot i \cdot \frac{m-6}{12}$$

Пошто је $b = \dfrac{K}{m}$, уводимо смјену:

$$\sum_{s=1}^{7} I_s = \frac{K}{m} \cdot i \cdot \frac{1}{12} \cdot (7m - 21)$$

$$700 = \frac{13.714{,}28}{m} \cdot 0{,}1 \cdot \frac{1}{12} \cdot (7m - 21) \Rightarrow m = 24$$

Разликује се од декурзивне у начину обрачуна укупне планиране камате за цјелокупан период трајања кредита.

Формуле:

$$\sum I = \frac{K \cdot i \cdot (m-1)}{24}$$

$$a = b + I$$

$$b = \frac{K}{m}$$

$$a = b + \frac{\sum I}{m} = \frac{K + \sum I}{m}$$

Разлика:

- Декурзивна: $(m+1)$ у формули за $\sum I$
- Антиципативна: $(m-1)$ у формули за $\sum I$
- Антиципативна камата је мања

Примјер 4 — Поређење метода

Задатак: Одобрен је потрошачки кредит за робу у вриједности 15.000 н.ј. Кредит се отплаћује у току 12 мјесеци једнаким:

a) мјесечним антиципативним ратама
b) двомјесечним антиципативним ратама
c) мјесечним декурзивним ратама
d) двомјесечним декурзивним ратама

Дато: $K = 15.000$, $m = 12$, $i = 0{,}06$

а) Мјесечне антиципативне рате:

$$K = 15.000$$

$$m = 12$$

$$i = 0{,}06$$

$$b = \frac{K}{m} = \frac{15.000}{12} = 1.250$$

$$\sum_{s=1}^{12} I_s = \frac{K \cdot i \cdot (m-1)}{24} = \frac{15.000 \cdot 0{,}06 \cdot (12-1)}{24} = 412{,}50$$

$$a = 1.250 + \frac{412{,}50}{12} = 1.284{,}38$$

б) Двомјесечне антиципативне рате:

$$K = 15.000$$

$$m = 12 \text{ (мјесеци)} \Rightarrow 6 \text{ (двомјесечних периода)}$$

$$p = 0{,}06$$

$$b = \frac{K}{m} = \frac{15.000}{6} = 2.500$$

$$\sum_{s=1}^{6} I_s = \frac{K \cdot i \cdot (m-1)}{12} = \frac{15.000 \cdot 0{,}06 \cdot (6-1)}{12} = 375$$

$$a = 2.500 + \frac{375}{6} = 2.562{,}50$$

Варијабилне отплате — формуле

Општи случај укупне камате код варијабилних отплата:

$$\sum_{s=1}^{N} I_s = \sum_{s=1}^{k} b_s \cdot i \cdot \frac{(m_s+1)\cdot m_s}{24} + \left(\sum_{s=1}^{k} i \cdot \frac{m_s \cdot m_{s+1} \cdot b_{s+1}}{12} + \ldots + \sum_{s=1}^{k} i \cdot \frac{m_s \cdot m_{s+k-1} \cdot b_{s+k-1}}{12} \right)$$

Рачунање рата код варијабилних отплата:

$$a_1 = b_1 + \frac{\sum_{s=1}^{N} I_s}{N}$$

$$a_2 = b_2 + \frac{\sum_{s=1}^{N} I_s}{N}$$

$$\vdots$$

$$a_k = b_k + \frac{\sum_{s=1}^{N} I_s}{N}$$

Примјер 5 — Варијабилне отплате

Задатак: Потрошачки кредит од 20.000,00 н.ј. одобрен је на 15 мјесеци. Кредит се отплаћује мјесечним ратама уз каматну стопу од 6%. Отплате у току првих 9 мјесеци мање су од отплата у току посљедњих 6 мјесеци за 500 н.ј. Израчунати вриједности мјесечних рата у обје отплатне серије.

Дато: $K = 20.000,\ m_1 = 9,\ m_2 = 6,\ k = 2,\ p = 0{,}06,\ b_2 = b_1 + 500$

Рјешење:

$$K = m_1 \cdot b_1 + m_2 \cdot b_2$$

$$20.000 = 9 \cdot b_1 + 6 \cdot (b_1 + 500) \Rightarrow b_1 = 1.133{,}33, \quad b_2 = 1.633{,}33$$

$$\sum_{s=1}^{15} I_s = b_1 \cdot i \cdot \frac{(m_1+1)\cdot m_1}{24} + b_2 \cdot i \cdot \frac{(m_2+1)\cdot m_2}{24} + i \cdot \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot b_2}{12} = 867{,}50$$

$$a_1 = b_1 + \frac{\sum I_s}{m_1 + m_2} = 1.133{,}33 + \frac{867{,}50}{15} = 1.191{,}18$$

$$a_2 = b_2 + \frac{\sum I_s}{m_1 + m_2} = 1.633{,}33 + \frac{867{,}50}{15} = 1.691{,}18$$

Отплата у промијењеним условима

Најчешћи случај: Ликвидација дуга прије истека рока

Двије методе:

1. Проспективна метода
2. Ретроспективна метода

Обје методе дају исти резултат, али користе различите приступе обрачуну.

Проспективна метода

Обрачун износа за ликвидацију:

Укупно задужење	$m \cdot a$
$-$ плаћене рате	$(n-1) \cdot a$
$-$ камата за бонификацију	$\sum_{s=6}^{7} I_s$
$=$ Износ који се плаћа у тренутку ликвидације	

Камата за бонификацију:

$$\sum_{s=n}^{m-1} I_s = \frac{b \cdot i \cdot (m-n+1) \cdot (m-n)}{24}$$

Ретроспективна метода

Обрачун износа за ликвидацију:

Остатак дуга	$= (m-n+1)\cdot b$
$+$ камата за n-ти мјесец	$I_n = b\cdot i\cdot \frac{(m-n+1)}{12}$
$+$ разлика између планиране и плаћене камате	$\frac{b\cdot i\cdot (2m-n+2)(n-1)}{24} - (a-b)(n-1)$
$=$ Износ који се плаћа у тренутку ликвидације	

Примјер 6 — Ликвидација кредита

Задатак: Одобрен је потрошачки кредит у износу од 16.000 КМ, уз учешће у готову од 30% и каматну стопу од 8%. Кредит се отплаћује у 8 једнаких декурзивних рата. Дужник на дан доспијећа шесте рате жели да у потпуности затвори кредит. Колико дужник треба да плати повјериоцу тог дана?

Дато:

- $K = 0{,}7 \cdot 16.000 = 11.200$ КМ
- $m = 8,\ i = 0{,}08,\ n = 6$

Израдити обрачун примјеном:

a) проспективне методе

b) ретроспективне методе

Примјер 6 — Припрема података

Израчунавање основних величина:

$$K = 0{,}7 \cdot 16.000 = 11.200$$

$$m = 8$$

$$i = 0{,}08$$

$$n = 6$$

$$b = \frac{11.200}{8} = 1.400$$

$$\sum I_s = \frac{11.200 \cdot 0{,}08 \cdot (8 + 1)}{24} = 336$$

$$a = 1.400 + \frac{336}{8} = 1.442$$

Примјер 6а — Проспективна метода

Проспективна метода:

$$\text{Укупно задужење} \quad m \cdot a = 8 \cdot 1.442 = 11.536$$

$$\text{Плаћене рате} \quad (n-1) \cdot a = (6-1) \cdot 1.442 = 7.210$$

$$\text{Камата за бонификацију} \quad \sum_{s=6}^{7} I_s = \frac{b \cdot i \cdot (m-n+1) \cdot (m-n)}{24}$$

$$= \frac{1.400 \cdot 0{,}08 \cdot (8-6+1) \cdot (8-6)}{24} = 28$$

Износ за ликвидацију:

$$= 11.536 - 7.210 - 28 = 4.298 \text{ KM}$$

Примјер 6б — Ретроспективна метода

Ретроспективна метода:

$$\text{Остатак дуга} \quad (m - n + 1) \cdot b = (8 - 6 + 1) \cdot 1.400 = 4.200$$

$$\text{Камата за } n\text{-ти мјесец} \quad I_n = 1.400 \cdot 0{,}08 \cdot \frac{8 - 6 + 1}{12} = 28$$

$$\begin{aligned} \text{Разлика камата} &= \frac{1.400 \cdot 0{,}08 \cdot (2 \cdot 8 - 6 + 2)(6 - 1)}{24} - (1.442 - 1.400)(6 - 1) \\ &= \frac{1.400 \cdot 0{,}08 \cdot 12 \cdot 5}{24} - 42 \cdot 5 = 280 - 210 = 70 \end{aligned}$$

Износ за ликвидацију:

$$= 4.200 + 28 + 70 = 4.298 \text{ KM}$$

Хвала на пажњи!

Питања?