Vjerovatnoca, uzorkovanje i očekivana vrijednost

Od bacanja novčića do zakona velikih brojeva

Bojan Baškot

Ekonomija i FPN

20. april 2026.

Pregled predavanja

Šta zapravo znači vjerovatnoca?

Intuitivna definicija

Vjerovatnoca nekog događaja = **udio puta** koliko bi se taj događaj desio kada bismo isti pokus ponavljali beskonačno mnogo puta.

Primjer 1: Bacanje novčića

Bacimo novčić. Mogućnosti: glava (G) ili pismo (P).

Od 10.000 bacanja, glava pada otprilike **5.000 puta**.

$P(\text{glava}) = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\,\%$

Nije garancija za svako bacanje — samo dugoročni udio!

Primjer 2: Prognoza vremena

"Sutra ima 30 % šanse za kišu."

Znači: od 100 dana sa sličnim uslovima, kiša pada otprilike **30 dana**.

Vjerovatnoca nije certifikat za sutra — ona opisuje **dugoročni obrazac**.

Šta vjerovatnoca NIJE

Vjerovatnoca 50 % za glavu ne znači da će svako drugo bacanje biti glava. Kratkoročno može biti 7 glava zaredom. Zakon vrijedi samo **dugoročno**.

Četiri osnovna pravila vjerovatnoce

Pravilo A: Raspon

Svaka vjerovatnoca je broj **između 0 i 1**.

$0 \leq P(\text{događaj}) \leq 1$

0 = nemoguće, 1 = sigurno

Pravilo B: Zbir

Zbir vjerovatnoca **svih** mogućih ishoda = 1.

Nešto se mora desiti!

Pravilo C: Komplement

$P(\text{ne-A}) = 1 - P(A)$

Pr.: Kiša 30 % dana ⇒ vedro 70 % dana.

Pravilo D: Sabiranje (isključivi događaji)

Ako A i B ne mogu desiti istovremeno:

$P(\text{A ili B}) = P(A) + P(B)$

Pr.: $P(1 \text{ ili } 2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

Provjera razumijevanja

Student prolazi ispit s vjerovatnocom 0,75. Vjerovatnoca pada?

$P(\text{pada}) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$ — tj. 25 % šanse za pad.

Primjeri modela vjerovatnoce

Primjer: Bacanje šestostrane kockice

Ishod	1	2	3	4	5	6
Vjerovatnoca	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Zbir: $6 \times \frac{1}{6} = 1$ ✓

Izračunavanje događaja

$P(\text{parni}) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(\text{broj} > 4) = P(5) + P(6) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$P(\text{nije } 6) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

Pažnja: Nisu svi ishodi jednako vjerovatni!

Namještena kockica može imati:

Ishod	1	2	3	4	5	6
P	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,5

Zbir još uvijek mora biti 1!

Zašto ponovljeni uzorci daju različite rezultate?

Ključni uvid

Svaki put kada izvučemo novi uzorak iz iste populacije, dobijamo **malo drugačije** rezultate. To nije greška — to je prirodna varijabilnost uzorkovanja.

Konkretni primjer: Vakcinacije

Pretpostavimo: u populaciji **71 %** odraslih smatra dječje vakcinacije važnim. Anketiramo 1.004 osobe.

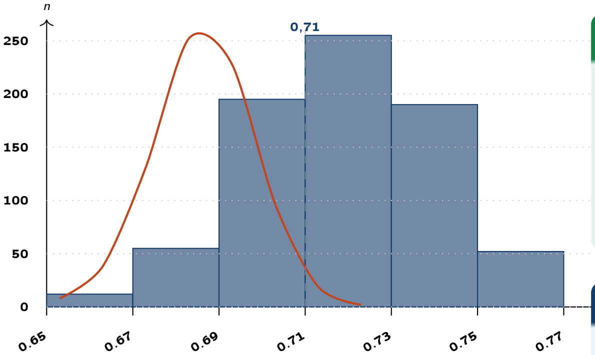
- Uzorak 1: 70,2 % kaže "Da"
- Uzorak 2: 72,1 % kaže "Da"
- Uzorak 3: 69,8 % kaže "Da"
- Uzorak 4: 71,5 % kaže "Da"

Nijedan ne daje tačno 71 %, ali svi su **blizu**. Taj obrazac opisuje **distribucija uzorkovanja**.

Distribucija uzorkovanja

Definicija

Distribucija uzorkovanja pokazuje koje vrijednosti statistika uzima u ponovljenim uzorcima iz iste populacije i koliko često uzima svaku vrijednost.



Histogram 1000 uzoraka + normalna aproksimacija.

Što možemo pročitati?

- Centar: **0,71** (prava proporcija)
- SD: **0,014**
- Pravilo 68-95-99,7: 95 % uzoraka: $0{,}71 \pm 2(0{,}014)$ $= [0{,}682;\ 0{,}738]$

Zaključak

Ne možemo predvidjeti *jedan* uzorak, ali poznajemo **obrazac** mnogih uzoraka.

Primjer: Anketa o kockanju među tinejdžerima

Postavljanje problema

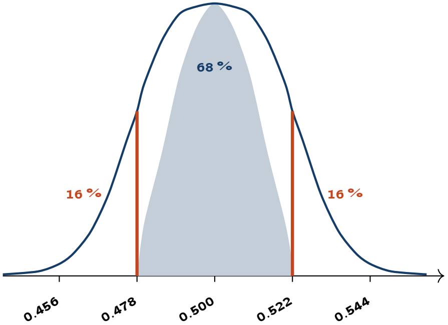
Anketiramo SRS od **501 tinejdžera**: "Da li odobravate legalno kockanje?"
Pretpostavimo: u populaciji tačno **50 %** reklo bi "Odobravam".

Distribucija uzorkovanja

$\hat{p}$ prati normalnu distribuciju:

- Sredina: $\mu = 0{,}50$
- SD: $\sigma = 0{,}022$

95 % uzoraka: $\hat{p} \in [0{,}456;\ 0{,}544]$
68 % uzoraka: $\hat{p} \in [0{,}478;\ 0{,}522]$



$P(\hat{p} < 47{,}8\,\%) = 0{,}16$

Praktični smisao: Čak i kada je prava proporcija tačno 50 %, anketa može "isporučiti" 48 % ili 52 %. To nije greška — to je normalna varijabilnost uzorkovanja.

Očekivana vrijednost — intuicija

Ključno pitanje

Ako igramo kockanje mnogo puta, koliko **u prosjeku** možemo očekivati da dobijemo *po jednoj opkladi*?

Primjer: Bacanje novčića za novac

Pravilo: glava = dobijate $+10\,\text{KM}$, pismo = gubite $-10\,\text{KM}$.

- Glava pada $50\,\%$ puta $\Rightarrow$ dobit $+10\,\text{KM}$
- Pismo pada $50\,\%$ puta $\Rightarrow$ gubitak $-10\,\text{KM}$

Prosječni dobitak $= 10 \times 0{,}5 + (-10) \times 0{,}5 = 0\,\text{KM}$

Ova igra je "pravedna" — dugoročno niko ne dobija niti gubi.

Šta ako promijenimo pravila?

Glava $= +11\,\text{KM}$, pismo $= -10\,\text{KM}$.

$E = 11(0{,}5) + (-10)(0{,}5) = 5{,}5 - 5 = +0{,}5\,\text{KM}$

Sada je igra **u vašem interesu** — dugoročno dobijate!

Formalna definicija očekivane vrijednosti

Formula

Za ishode $a_1, \ldots, a_k$ s vjerovatnocama $p_1, \ldots, p_k$:

$$\mu = E(X) = a_1 p_1 + a_2 p_2 + \cdots + a_k p_k$$

Svaki ishod se ponderira **svojom vjerovatnocom**. Češći ishodi dobijaju veći ponder, rjeđi manji.

Interpretacija

Očekivana vrijednost je **dugoročni prosjek** — vrijednost oko koje se prosječni dobitak/gubitak stabilizuje nakon velikog broja ponavljanja.

Nije nužno vrijednost koja se može ostvariti u jednom pokusu. (Očekivani broj djece po porodu može biti 1,85 — takvo dijete ne postoji.)

Primjer 1: Lutrija DC-3

Pravila igre

Plaćate **1 USD**. Birate trocifreni broj. Lutrija izvlači pobjednički broj. Ako pogodate $\Rightarrow$ dobijate **500 USD**. Postoji 1000 trocifrenih brojeva.

Model vjerovatnoce

Ishod	Dobitak	Vjerovatnoca
Pobjeda	+500 USD	0,001
Gubitak	0 USD	0,999

Izračun očekivane vrijednosti

$E = 500 \times 0{,}001 + 0 \times 0{,}999 = 0{,}50\,\text{USD}$

Ali platili ste **1,00 USD**!

Očekivani gubitak:
$1{,}00 - 0{,}50 = -0{,}50\,\text{USD}$

Za svaki uloženi USD, dugoročno nazad 50 centi.

Provjera intuicijom

U 1000 igranja: pobijedite jednom (+500 USD), izgubite 999 puta (0 USD).
Uloženo: 1000 USD. Primljeno: 500 USD. Neto: $-$**0,50 USD po igranju**.

Primjer 2: Vozila po američkim domaćinstvima

Podaci (US Energetska uprava, 2017.)

Broj vozila (a_i)	0	1	2	3	4	5	6
Udio domaćinstava (p_i)	0,09	0,34	0,33	0,15	0,06	0,02	0,01

Izračun

$$E = 0(0{,}09) + 1(0{,}34) + 2(0{,}33) + 3(0{,}15) + 4(0{,}06) + 5(0{,}02) + 6(0{,}01)$$
$$= 0 + 0{,}34 + 0{,}66 + 0{,}45 + 0{,}24 + 0{,}10 + 0{,}06$$
$$= 1{,}85 \text{ vozila}$$

Interpretacija

Prosječno američko domaćinstvo ima **1,85 vozila**.

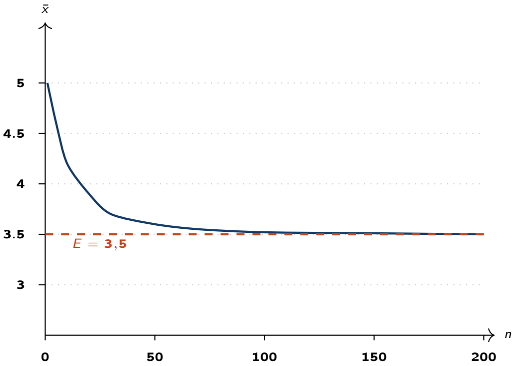
Nijedno domaćinstvo ne može imati 1,85 vozila — ali to je dugoročni prosjek.

Isti princip: prosječna porodica ima 2,53 člana — takva porodica ne postoji!

Zakon velikih brojeva — velika ideja

Zakon velikih brojeva (ZVB)

Ako se slučajni pokus s numeričkim ishodima ponavlja **mnogo puta nezavisno**, aritmetička sredina stvarno opaženih ishoda približava se **očekivanoj vrijednosti**.



Prosjek bacanja kockice konvergira prema 3,5.

Primjer: Kockica

$E = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)/6 = 3{,}5$

- 10 bacanja: prosjek $\approx 4{,}2$
- 100 bacanja: prosjek $\approx 3{,}6$
- 10.000 bacanja: prosjek $\approx 3{,}500$

Važno upozorenje

ZVB vrijedi samo ako su pokusi **nezavisni**! Kockica nema pamćenje — prethodni rezultati ne utječu na sljedeće.

Kazino i zakon velikih brojeva

Zašto kazino uvijek pobjeđuje?

“Kuća” (kazino) **uopšte ne kocka**.

Kazino je unaprijed izračunao očekivanu vrijednost svake igre i zna da će **dugoročno** imati profit.

ZVB **garantuje** profit uz dovoljno opklada. Nije potrebno varati — matematika radi umjesto toga.

Rulet: jednostavan primjer

Europska roulette: 37 polja (0–36).
Opklada na jedan broj: dobit $+35$, gubitak -1.

$$E = 35 \cdot \frac{1}{37} + (-1) \cdot \frac{36}{37} = 0{,}946 - 0{,}973 = -0{,}027$$

Kazino uzima 2,7 cent na svaki ulog od 1 EUR.

Paradoks kockara

“Crna nije izašla 5 puta zaredom — sad sigurno dolazi!”

POGREŠNO. Rulet nema pamćenje. Vjerovatnoca crvene je uvijek ista.

ZVB govori o **velikom broju ishoda**, ne o sljedećem ishodu.

Kazino strategija

- Jeftina zabava i pogodnosti
- Veliki protok igrača
- Više opklada = sigurniji profit

Osiguranje i zakon velikih brojeva

Kako radi osiguravajuće društvo?

Kompanija za životno osiguranje se “kladi” da neće morati isplatiti policu.

Neko će umrijeti — ali kompanija **zna vjerovatnoce** i oslanja se na ZVB da predvidi **prosječni iznos isplata**.

Premija se postavlja **iznad** očekivane isplate — to je profit kompanije.

Uprošćeni primjer

Osiguravate 10.000 osoba, svaka plaća 500 KM/god.
Prihod: 5.000.000 KM

Aktuarski procijenjene isplate: 400 KM/osobi.
Očekivane isplate: 4.000.000 KM

Profit: **1.000.000 KM**

Što više polica — što predvidljiviji profit.

Analogija kazino – osiguranje

Kazino	Osiguravajuće društvo	Princip
Dobitak kuće	Premija – isplata	ZVB
Mnogo opklada	Mnogo polica	Veliki n
Igrači gube u prosjeku	Osigurani plaća više	Ponder

Kada ZVB ne vrijedi — važna upozorenja

Greška 1: Mali broj pokusa

"Bacim novčić 10 puta i dobijem 7 glava — kovanica je lažna!"

Ne. Sedam glava od 10 nije neobično. ZVB zahtijeva **velik** broj pokusa.

Greška 2: Zavisni pokusi

ZVB podrazumijeva **nezavisnost**. Ako ishodi nisu nezavisni (npr. epidemija pogađa više polica istovremeno), može doći do katastrofalnih gubitaka.

Pr.: fin. kriza 2008.

Greška 3: Gambler's fallacy

"Crna nije izašla 10 puta — sad mora crvena!"

Rulet nema pamćenje. Svako okretanje je nezavisno. Vjerovatnoca crvene je uvijek ista.

Zlatno pravilo

ZVB garantuje da će **prosjek** dugog niza konvergirati ka očekivanoj vrijednosti. Ne garantuje ništa o **jednom** sljedećem ishodu.

Tombola na školskoj priredbi — postavljanje problema

Scenarij

Razred organizuje tombolu na školskoj priredbi da bi prikupio novac za ekskurziju. Prodaju se ulaznice po **2 KM** komad. Razred je štampao **200 ulaznica**. Nagradni fond je ovakav:

Nagrada	**Broj nagrada**	**Vrijednost**	**Vjerovatnoca (na 200)**
Glavni dobitak (bicikl)	1	200 KM	$\frac{1}{200} = 0{,}005$
Druga nagrada (knjiga)	4	20 KM	$\frac{4}{200} = 0{,}020$
Treća nagrada (olovke)	20	5 KM	$\frac{20}{200} = 0{,}100$
Bez nagrade	175	0 KM	$\frac{175}{200} = 0{,}875$
Ukupno	**200**		**1,000**

Provjera Pravila B

$0{,}005 + 0{,}020 + 0{,}100 + 0{,}875 = 1{,}000$ ✓

Tombola — izračun očekivane vrijednosti

Korak 1: Očekivana nagrada po ulaznici

$E(\text{nagrada}) = 200 \times 0{,}005 + 20 \times 0{,}020 + 5 \times 0{,}100 + 0 \times 0{,}875$

$= 1{,}00 + 0{,}40 + 0{,}50 + 0{,}00 = 1{,}90\,\text{KM}$

Korak 2: Očekivani neto dobitak

Cijena ulaznice: 2,00 KM
Očekivana nagrada: 1,90 KM

Očekivani gubitak kupca:
$2{,}00 - 1{,}90 = -0{,}10\,\text{KM}$

Kupac dugoročno gubi 10 feninga po ulaznici.

Korak 3: Prihod razreda

Prodato: 200 ulaznica po 2 KM
Ukupni prihod: $200 \times 2 = 400\,\text{KM}$

Ukupni trošak nagrada:
$200 + 4 \times 20 + 20 \times 5$
$= 200 + 80 + 100 = 380\,\text{KM}$

Zarada razreda:
$400 - 380 = 20\,\text{KM}$

Veza s očekivanom vrijednošću

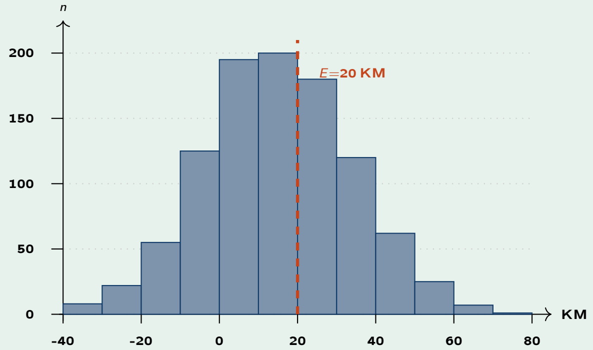
$200 \times 0{,}10\,\text{KM/ulaznici} = 20\,\text{KM}$ — isti rezultat! *Očekivani gubitak po kupcu × broj kupaca = zarada*

Tombola — distribucija uzorkovanja i ZVB

Zašto razred može računati na zaradu od 20 KM?

200 ulaznica je dovoljno velik broj da ZVB "radi". Svaka ulaznica je **nezavisna** od ostalih.

Simulacija: 1000 tombola



Šta graf pokazuje?

- Centar distribucije zarade je oko **20 KM**
- Postoji varijabilnost — može biti i −30 KM ili +70 KM
- Ali **višina** rezultata gravitira ka 20 KM

Ključna lekcija

Tombola je mali "kazino"!
Organizator je izračunao očekivanu vrijednost i zna da će dugoročno biti na dobitku.
Jedan razred, jedna tombola = može biti gubitak. Ali skola koja radi tombolu svake godine sigurno zaraduje.

Tombola — pitanja za razmišljanje

Zadaci za učenike

Koristite podatke o tomboli (200 ulaznica po 2 KM) da odgovorite:

Pitanje 1

Razred razmatra dodavanje još jedne nagrade: bon za pistu za klizanje (10 KM), ali sada bi ulaznica koštala 2,50 KM.

Izračunaj novu očekivanu vrijednost.
Je li ova tombola povoljnija za kupce?

Pitanje 2

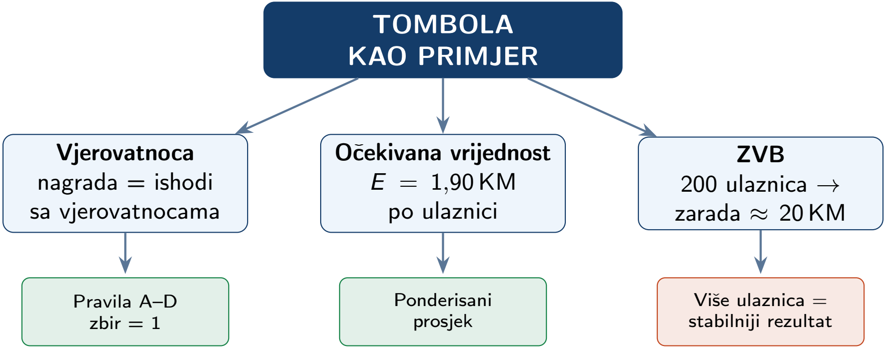
Ako razred proda samo **50** ulaznica umjesto 200, hoće li ZVB još uvijek garantovati zaradu od 0,10 KM po ulaznici? Objasni.

Rješenja

Pitanje 1:
Nova nagrada: vjerovatnoca $= \frac{1}{200}$
Novi
$E = 1{,}90 + 10 \times 0{,}005 = 1{,}90 + 0{,}05 = 1{,}95$ KM
Neto gubitak kupca: $2{,}50 - 1{,}95 = -0{,}55$ KM
Skuplja ulaznica, ali gubitak je veći — ne, nije povoljnija.

Pitanje 2:
Sa 50 ulaznica, ZVB **slabije radi** — varijabilnost je veća, a mogucnost gubitka realna. Razred može lako zaraditi ili izgubiti. Više ulaznica = stabilniji rezultat.

Sažetak — sve u jednoj slici



Hvala na pažnji!

Pitanja i diskusija

"Vjerovatnoca nije magija — ona je matematika ponavljanja."

— *osnovna ideja zakona velikih brojeva*