

Процентни рачун

- Основни примјери пропорције
- Израчунавање камате, каматне стопе и осталих параметара у поступку обрачуна камате

Андреј Шева, асистент
andrej.seva@ef.unibl.org

Консултације уз претходну најаву путем мејла.
Сриједом од 15.00 до 17.00 часова.

Основе процентног рачуна и пропорције

- Појам пропорције: однос између 2+n величина
- Два облика: директна и обрнута; проста и сложена
- Општи облик пропорције:

$$(1) \quad a_1:b_1 = a_2:b_2 = a_3:b_3 = \dots = a_{n-1}:b_{n-1} = a_n:b_n$$

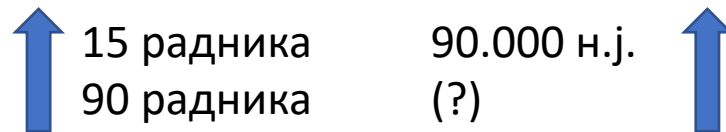
$$(2) \quad \begin{aligned} a_1:b_1 &= a_2:b_2 \\ &= a_3:b_3 \\ &= \dots \\ &= a_{n-1}:b_{n-1} \\ &= a_n:b_n \end{aligned}$$

$$(3) \quad \begin{aligned} a_1:b_1 &= a_2:b_2 \\ &= a_3:b_3 \\ &= \dots \\ &= a_{n-1}:b_{n-1} \\ &= a_n:b_n \end{aligned}$$

$$(4) \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{(a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n)}{(b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_{n-1} \cdot b_n)}$$

Директна пропорција

15 радника у једном сектору неког предузећа заради мјесечну бруто плату од 90.000 н.ј. укупно. Колики износ обавеза бруто плата ће предузеће морати да уплаћује на годишњем нивоу, ако предузеће има 90 радника, под претпоставком да сектор у потпуности репрезентује предузеће у погледу просјечне зарађене бруто плате?



$$x : 90.000 \text{ н.ј.} = 90 \text{ радника} : 15 \text{ радника}$$

$$x \cdot 15 \text{ радника} = 90.000 \text{ н.ј.} \cdot 90 \text{ радника}$$

$$x = \frac{90 \text{ радника} \cdot 90.000 \text{ н.ј.}}{15 \text{ радника}} = 540.000 \text{ н.ј.} \quad \longrightarrow \quad \text{Мјесечни износ свих бруто плата}$$

$$12x = 540.000 \frac{\text{н.ј.}}{\text{мјесец}} \cdot 12 \text{ мјесеци} = 6.480.000 \text{ н.ј.} \quad \longrightarrow \quad \text{Годишњи износ свих бруто плата}$$

Директна пропорција

(...) Установили смо да у овом предузећу ради 90 радника, а њихова укупна мјесечна бруто плата износи 540.000 н.ј. Предузеће планира да смањи укупни буџет за плате на 537.000 н.ј. мјесечно. Колико радника може задржати предузеће уз нове резове у буџету, под условом да просјечна мјесечна бруто плата по раднику остане иста?

	90 радника	540.000 н.ј.	
	(?) радника	537.000 н.ј.	

$$x : 90 \text{ радника} = 537.000 \text{ н.ј.} : 540.000 \text{ н.ј.}$$

$$x \cdot 540.000 \text{ н.ј.} = 90 \text{ радника} \cdot 537.000 \text{ н.ј.}$$

$$x = \frac{90 \text{ радника} \cdot 537.000 \text{ н.ј.}}{540.000 \text{ н.ј.}} = 89,5 \text{ радника}$$

Предузеће мора отпустити једног радника **након 6 мјесеци.**

Обрнута пропорција

(...) Предузеће се бави архитектонским пројектовањем. Сектор задужен за пројектовање броји 15 запослених. 15 запослених заврши 1 пројекат за 14 дана. Конкурентске фирме у просјеку заврше 3 пројекта за мјесец (30) дана. Колико додатних радника је потребно запослити да би се предузеће позиционирало у просјек специфичног тржишта по количини завршених мјесечних пројеката?



15 запослених
($x+15$) запослених

14 дана
(30:3) дана



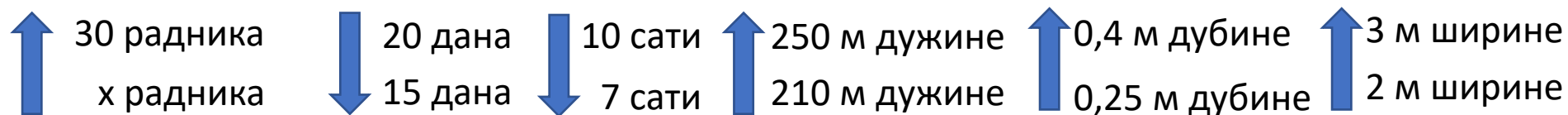
$$(x + 15) : 15 = 14 : (30 : 3)$$

$$x = 6$$

Потребно је запослити **6 нових радника**.

Сложена пропорција

30 радника радећи 20 дана по 10 сати дневно ископа канал дужине 250 м, дубине 0,4 м и ширине 3 м. Колико би радника требало радити како би се ископао канал дуг 210 м, дубине 0,25 м и ширине 2 м, под условом да радници раде 15 дана по 7 сати дневно?



$$x : 30 = 20 : 15 = 10 : 7 = 210 : 250 = 0,25 : 0,4 = 2 : 3$$

$$x : 30 = (20 \cdot 10 \cdot 210 \cdot 0,25 \cdot 2) : (15 \cdot 7 \cdot 250 \cdot 0,4 \cdot 3)$$

$$x : 30 = 21000 : 31500$$

$$x = 20$$

Требало би радити 20 радника.

Процентни (промилни) рачун

Основна пропорција:

Главница (номинална вриједност)

Процентна (промилна) стопа (без %)

$$G : P = 100 : p \text{ (процентни рачун)}$$

$$G : P = 1000 : p \text{ (промилни рачун)}$$

Процентни (промилни) принос

Процентни (промилни) рачун

Колика је номинална вриједност зајма ако је банка код уплате зајма зарачунала провизију и пратеће трошкове (сумарно 2 ‰) у износу од 9.000 н.ј?

$$G : P = 1000 : p$$

$$G : 4.500 = 1.000 : 2$$

$$2G = 4.500.000$$

$$G = 2.250.000 \text{ н.ј.}$$

Процентни (промилни) рачун

Примјер 1.

Предузеће је продало робу А са зарадом од 8%, а робу Б са зарадом од 6%. Укупна зарада за робу А и робу Б износи 5.800 н.ј. Зарада на робу Б износи 45% зараде на робу А. Израчунати колико је примљено за робу А, а колико за робу Б.

Примјер 2.

Цијена неког производа са ПДВ-ом је једнака x . Колика је цијена тог производа без ПДВ-а, ако је стопа ПДВ-а једнака $a\%$? Колика је одбитна (прерачуната) стопа ПДВ-а?

Примјер 3.

Промет неког предузећа у првом кварталу је 27%, у другом 23%, а у трећем $\frac{6}{25}$ годишњег промета. Колики је промет у сваком кварталу, ако је промет у трећем и четвртном 129.000 н.ј?

Рачун подјеле

- Коефицијент пропорције (k)
- Износ подјеле (N)

Примјери

Примјер 1.

Три ученика треба да подјеле 14.000 н.ј. за куцање текстова. Договорено је да то буде обрнуто сразмјерно броју словних грешака. Како ће подјела бити извршена ако је први направио 300, други 600, а трећи 1200 грешака у куцању?

Примјер 2.

Износ од 728.000 н.ј. Треба подијелити на 3 лица тако да свако сљедеће добија 20% више од претходног. Колико новчаних јединица добија свако лице?

Примјер 3.

Четири ученика су награђени наградом од 3.600 н.ј. Колико је добио сваки од њих ако се награде дијеле у сразмјери 1,5 : 2 : 2,5 : 3?

Примјер 1

— рјешење:

Увезено из Goodnotes,
MathType

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{300} : \frac{1}{600} : \frac{1}{1200}$$

одрнуто
сравнујемо

$$x_1 + x_2 + x_3 = 14.000$$

догједовање
мешине
(хондера)

$$x_1 = \frac{1}{300}k$$
$$x_2 = \frac{1}{600}k$$
$$x_3 = \frac{1}{1200}k$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{300}k + \frac{1}{600}k + \frac{1}{1200}k$$

$$\frac{4k + 2k + k}{1200} = 14.000$$

$$k = 2.400.000$$

коэф.
пропорције

$$x_1 = \frac{2.400.000}{300} = 8.000 \text{ шт.}$$

$$x_2 = \frac{2.400.000}{600} = 4.000 \text{ шт.}$$

$$x_3 = \frac{2.400.000}{1.200} = 2.000 \text{ шт.}$$

Примјер 2

— рјешење:

Увезено из Goodnotes,
MathType

капитални
фактор
↑
 $(1 + \frac{p}{100})$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 728.000 \quad (1)$$
$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : (1, 2 * 1) : [1, 2 * (1, 2 * 1)] \quad (2)$$
$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 1, 2 : 1, 44$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} x_1 &= k \\ x_2 &= 1.2k \\ x_3 &= 1.44k \end{aligned} \quad (3)$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 728.000 \\ k + 1, 2k + 1, 44k &= 728, 000 \\ 3, 64k &= 728.000 \\ k &= 200.000 \end{aligned} \quad (4)$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} x_1 &= 200, 000 \\ x_2 &= 240.000 \\ x_3 &= 288.000 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} x_1 &= 200, 000 \\ x_2 &= 240.000 \\ x_3 &= 288.000 \end{aligned}} \right\} \text{врхунамо у } (3) \quad (5)$$

Верижни рачун

- Специфичан случај правила тројног (рачуна подјеле)
- Изражавање мјерних јединица, девизни курс, паритет валута, итд.

Примјери

Примјер 1.

Ако 5 црвених куглица има масу као 6 љубичастих куглица, 10 плавих као 12 зелених, 3 наранџасте као 15 бијелих, 5 плавих као 3 црвене, те 7 љубичастих као 7 наранџастих, колико бијелих има масу као једна зелена куглица? **Одговор: 3 бијеле имају масу као једна зелена куглица.**

Примјер 2.

Колико енглеских тона (et) робе може купити предузеће из Енглеске у САД-у за 5.000 британских фунти, ако је цијена те робе у САД-у 4.000 америчких долара за 35 америчких тона (at)? Курс долара је 107,70 српских динара, а курс фунте 127,56 српских динара ($1 \text{ at} = 907,20 \text{ kg}$ и $1 \text{ et} = 1.016 \text{ kg}$)? **Одговор: 46,27 et.**

Примјер 1 — рјешење:

Увезено из Goodnotes, MathType

$$5c = 6y \Rightarrow c = 6/5 y$$

$$10p = 12z \Rightarrow z = 10/12 p$$

$$3n = 15b \Rightarrow n = 5b$$

$$5p = 3c \Rightarrow p = 3/5 c$$

$$7y = 7n \Rightarrow y = n$$

$$x \cdot b = 1 \cdot z$$

$$x \cdot b = 10/12 p$$

$$x \cdot b = 10/12 \cdot 3/5 c$$

$$x \cdot b = 10/12 \cdot 3/5 \cdot 6/5 y$$

$$x \cdot b = 10/12 \cdot 3/5 \cdot 6/5 \cdot n$$

$$x \cdot b = 10/12 \cdot 3/5 \cdot 6/5 \cdot 5b \quad / : b$$

$x = 3$ $\Rightarrow$ Једна зелена кутица
има масу као 3
бијеле.

Примјер 2

— рјешење:

Увезено из Goodnotes,
MathType

лијева страна	десна страна
x et	5.000 GBP
1 GBP	127,56 RSD
107,70 RSD	1 USD
4.000,00 USD	35 at
1 at	907,20 kg
1.016,00 kg	1 et

$$x = \frac{\text{десно}}{\text{лијево}}$$

$$x = \frac{5.000 \text{ GBP} \cdot 127,56 \text{ RSD} \cdot 1 \text{ USD} \cdot 35 \text{ at} \cdot 907,2 \text{ kg} \cdot 1 \text{ et}}{1 \text{ GBP} \cdot 107,70 \text{ RSD} \cdot 4000 \text{ USD} \cdot 1 \text{ at} \cdot 1.016 \text{ kg}}$$

$$x = 46,27 \text{ et}$$

Прости каматни рачун (simple interest)

- Камата vs. каматна стопа
- Прости vs. сложени каматни рачун
- Антиципативни (prenumerando) vs. декурзивни (postnumerando) обрачун
- Начини рачунања:
 - Француска метода (година има 360 дана)
 - Енглеска метода (година има 365 дана)
 - Њемачка метода (сваки мјесец 30, а година 360 дана)
 - Комбинована (сваки мјесец 30, а година 365 дана)

Антиципативни и декурзивни обрачун

почетна бр. капитал K $\rightarrow$ камата I $\rightarrow$ будућа вриједност капитала K_t

$$K + I = K_t$$

Антиципативно

$$I_a = Kt \cdot \frac{p_d}{100} \cdot t$$

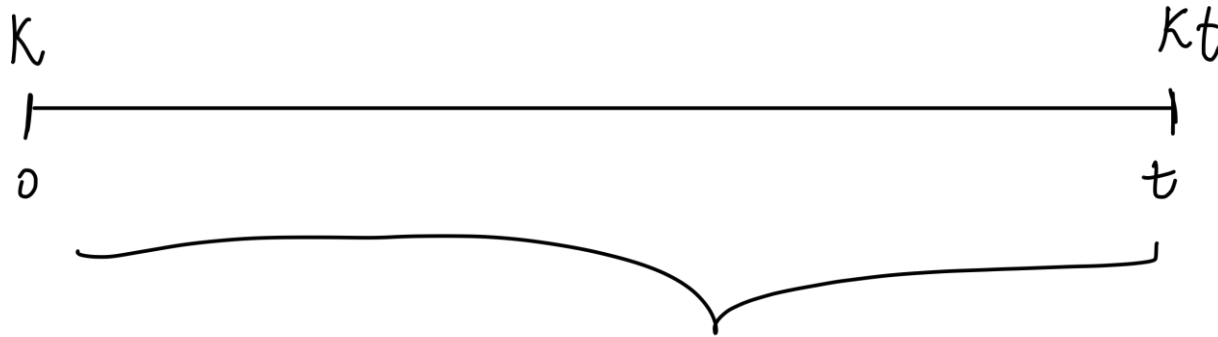
$\rightarrow$ антиципативни
обрачун

Декурзивно

$$I_d = K \cdot \frac{p}{100} \cdot t$$

$\rightarrow$ декурзивни
обрачун

Антиципативни и декурзивни обрачун



$$I = K_t \cdot \frac{Pd}{100} \cdot t \rightarrow \text{АНТИЦИПАТИВНИ ОБРАЧУН}$$



$$I = K \cdot \frac{P}{100} \cdot t \rightarrow \text{ДЕКУРЗИВНИ ОБРАЧУН}$$

Антиципативни и декурзивни обрачун

- Антиципативни обрачун: Износ камате је једнак производу (аликвотне) дисконтне стопе и стања капитала на крају периода.
- Декурзивни обрачун: Износ камате је једнак производу (аликвотне) каматне стопе и стања на почетку периода.

* У пракси и по интуицији, више је заступљен декурзивни обрачун.

Примјери

Примјер 1. Предузеће се 1. јануара задужило на износ од 10.000 н.ј. уз каматну стопу од 12%. Израчунати колико треба да плати 30. априла, ако се камата обрачунава: а) антиципативно и б) декурзивно.

Примјер 2. Улагано је 10.000 н.ј. сваког дана у току ... дана. Каматна стопа је 5%. Заједно са простом каматом, улагач је један дан по посљедњем улогу имао на рачуну 110.091,66 н.ј. Колико дана је улагано по 10.000 н.ј?

Примјер 3. На краткорочни кредит од 13.560 н.ј. који је реализован 15. 7. обрачуната је камата, на почетку по 5%, а затим по 7%. Када је промијењена каматна стопа ако је кредит враћен 28. 10. износом од 13.785,50 н.ј?

Примјер 4. Предузеће је узело два кредита од банке. Први кредит износи K_1 н.ј. и одобрен је на 60 дана уз каматну стопу од 6%. По одбитку камате, провизије од 1% на износ кредита умањеног за камату и 10 н.ј. трошкова, банка је дозначила остатак дужнику. Други износ кредита од K_2 н.ј. Одобрен је на 90 дана уз каматну стопу од 5%, провизију 2% од износа кредита умањеног за камату и трошак од 10 н.ј, банка је дозначила остатак дужнику. Укупно је дозначено 48.578 н.ј. Израчунати кредите ако је камата на први кредит већа од камате на други кредит за 20%.

Примјери

Примјер 1.

а) АНТИЦИПАТИВНИ ОБРАЧУН

$$K_t = \frac{K}{1 - i_d \cdot t} = \frac{10.000}{1 - 0,12 \cdot \frac{120}{365}} = \frac{10.000}{0,960548} \approx 10.420,72$$

б) ДЕКУРСИВНИ ОБРАЧУН

$$Kt = K(1 + i \cdot t) = 10.000(1 + 0,12 \cdot \frac{120}{365}) = 10.000 \cdot 1,03945 \approx 10.394,5$$

Примјери

Примјер 2.

$$d \cdot 10.000 \left(1 + 0,05 \cdot \frac{d}{365} \right) = 110.091,66$$

⋮

$$d_1 = 10,9926$$

✓

$$d_2 = -7.311,01$$

$$d_1 \approx 11 \quad \checkmark$$

оглауујемо

Уплатано је 11 дана
по 10.000.

Примјери

Примјер 3.

Каматна стопа се мијења 18. септембра (17. септембар је посљедњи дан обрачуна по 5%) —> 15. јул + 64 дана.

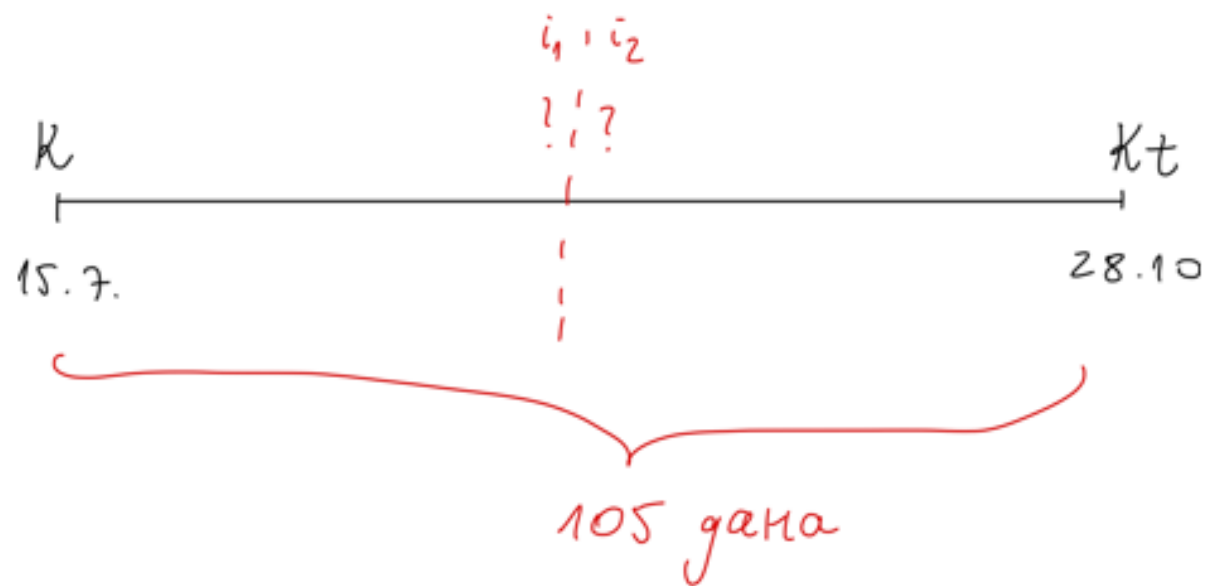
$$d_1 = 64$$

$$d_2 = 41$$

$$\text{Камата} = 13.560 \cdot 0,05 \cdot \frac{d_1}{365} + 13.560 \cdot 0,07 \cdot \frac{d_2}{365}$$

$$\text{За враћање} = 13.560 + \text{Камата}$$

$$\text{Укупан број дана } (d_1 + d_2 = 105) \Rightarrow d_2 = 105 - d_1$$



Примјери

Примјер 4.

$$K_1 = \dots$$

$$K_2 = \dots$$

$$d_1 = 60$$

$$d_2 = 90$$

$$p_1 = 6\%$$

$$p_2 = 5\%$$

$$\pi_1 = 1\%$$

$$\pi_2 = 2\%$$

$$I_1 = K_1 \cdot 0,06 \cdot \frac{60}{360} \quad \left. \vphantom{I_1 = K_1 \cdot 0,06 \cdot \frac{60}{360}} \right\} \text{износ камате код } K_1$$

$$I_2 = K_2 \cdot 0,05 \cdot \frac{90}{360} \quad \left. \vphantom{I_2 = K_2 \cdot 0,05 \cdot \frac{90}{360}} \right\} \text{износ камате код } K_2$$

$$I_1 = 1,2 \cdot I_2 \quad \left. \vphantom{I_1 = 1,2 \cdot I_2} \right\} I_1 \text{ је за 20\% већа од } I_2$$

$\Rightarrow$

$$K_1 \cdot 0,06 \cdot \frac{60}{360} = 1,2 \cdot K_2 \cdot 0,05 \cdot \frac{90}{360}$$

$$K_2 = \frac{2}{3} K_1$$

$$(K_1 - I_1)(1 - 0,01) - 10 + (K_2 - I_2)(1 - 0,02) - 10 = 48.758$$

умањење за камату

привисца

у трошкове

$$\Rightarrow \begin{matrix} K_1 = 30.000 \\ K_2 = 20.000 \end{matrix} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} K_1 = 30.000 \\ K_2 = 20.000 \end{matrix}} \right\} \text{износи кредита појединачно}$$



ПОДСЈЕТНИК

АРИТМЕТИЧКИ И ГЕОМЕТРИЈСКИ НИЗ

