

Сукцесивна улагања — улози

III таблице • Декурзивни и антиципативни улози

Андреј Шева, асистент

2025/2026 • Финансијска математика — Вјежбе 8

Препоручена литература за III и IV таблице • Lešević, V., Mlinarević, N. (2021). Privredna i finansijska matematika (p. 405 стр.). Ekonomski fakultet. • Krčmar, M. (2002). Finansijska matematika i metode investicionog odlučivanja (p. 481). Kemigrafika.

За једнака сукцесивна улагања, распоређена у унапријед дефинисаним једнаким временским интервалима (серија улога)

3 варијанте:

1. Период капиталисања = Период улагања
2. Период улагања < Период капиталисања (чешће улагање од капиталисања)
3. Период улагања > Период капиталисања (чешће капиталисање од улагања)

Двије врсте улога:

- **Декурзивни улози** — уплата на крају периода
- **Антиципативни улози** — уплата на почетку периода

Период капиталисања =
Период улагања

Период капиталисања = Период улагања



Формула за антиципативне улоге:

$$K_n = U \cdot \frac{r(r^n - 1)}{r - 1} = U \cdot III_p^n$$

гдје је $r = 1 + \frac{p}{100}$ (каматни фактор)

Период капиталисања = Период улагања



Формула за декурзивне улоге:

$$K_n = U \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} = U \cdot (1 + III_p^{n-1})$$

гдје је $r = 1 + \frac{p}{100}$ (каматни фактор)

Примјери — Период капиталисања = Период улагања

1. Улагано је у току 8 година сваког полугодишта по 4.000 н.ј. уз каматну стопу од 5% и полугодишње капиталисање. Колика је вриједност свих улога 2 године након посљедњег улагања, ако се ради о: а) антиципативним, б) декурзивним улозима?
2. Улагано је у току 10 година на крају сваког тромјесечја уз каматну стопу од 12% и тромјесечни обрачун камате. У току прве 4 године улози износе по ... н.ј, у току наредне 3 године по 54.000 н.ј, а у току посљедње 3 године по ... н.ј. Колико износи коначна вриједност свих улога 3 године и 2 мјесеца након посљедњег улагања, ако је улог прве серије за 20% већи од улога друге серије, а улог треће серије за 40% мањи од улога прве серије?
3. Предузеће је у току 12 година издвајало на посебан рачун на сљедећи начин: у току прве 3 године на почетку сваког полугодишта по ... н.ј, у току наредних 5 година на крају сваког полугодишта по ... н.ј. и у току посљедње 4 године на крају сваког полугодишта по ... н.ј. По истеку 2 године од дана посљедњег улагања предузеће је остварило на име укупне камате 10.520,41 н.ј. Израчунати износе улога сваке серије, као и укупну вриједност којом предузеће располаже двије године након посљедњег улагања, ако су улози друге серије већи од улога прве серије за 240%, а улози треће серије мањи од улога друге серије за 60% и ако је камата рачуната по стопи од 12% уз шестомјесечно капиталисање.

Примјер 1 — Антиципативни улози

Дато: $U = 4.000$, $i = 0,05$, $i_r = \frac{0,05}{2} = 0,025$, $m = n$ (период кап. = период улагања)

Број полугодишта улагања: $8 \cdot 2 = 16$

Број полугодишта до K_n : $16 + 3 = 19$ (2 године након посљедњег улагања, 3 периода пролонгирамо јер имамо 1 период у резерви прије краја серије, улози су антиципативни)

Рјешење:

$$K_{20} = 4.000 \cdot III_{2,5}^{16} \cdot I_{2,5}^3$$

Објашњење:

- $III_{2,5}^{16}$ — пролонгација свих улога на крај периода улагања (III таблице)
- $I_{2,5}^4$ — пролонгација акумулираног износа на тражени период (I таблице, нема више улога)

Дато: $U = 4.000$, $i = 0,05$, $i_r = 0,025$

Рјешење:

$$K_{20} = 4.000 \cdot (1 + III_{2,5}^{16-1}) \cdot I_{2,5}^4$$

Разлика од антиципативних:

- Код декурзивних улога, посљедњи улог у серији **не носи камату** (уплаћен на крају периода)
- Зато користимо $(1 + III_p^{n-1})$ умјесто III_p^n

Примјер 2 — Више серија улога

Дато: $U = 1,2U'$, $U'' = 0,6U$, $U' = 54.000$, $i = 0,12$, $i_r = 0,03$

Рјешење:

$$K_n = \left[U \left(1 + III_3^{16-1} \right) I_3^{36} + U' \left(1 + III_3^{12-1} \right) I_3^{24} + U'' \left(1 + III_3^{12-1} \right) I_3^{12} \right] \cdot I_3^{2/3}$$

или

$$K_n = \left[U \left(1 + III_3^{16-1} \right) I_3^{36} + U' \left(1 + III_3^{12-1} \right) I_3^{24} + U'' \left(1 + III_3^{12-1} \right) I_3^{12} \right] \cdot \left(1 + \frac{2}{12} \cdot 0,12 \right)$$

Објашњење пролонгације:

- 3 године и 2 мјесеца = 12 тромјесечја + 2 мјесеца = $12\frac{2}{3}$ тромјесечја
- Свака серија се пролонгира до краја своје серије, затим до краја укупног периода улагања, па на тражени период. Уколико се коначно стање налази на нецијелом периоду у односу на период капиталисања, може се пролонгирати првим таблицама (сложеним каматним рачуном, односном употребом конформне каматне стопе) или простим каматним рачуном за одговарајући број периода испод цијелог периода капиталисања, а у односу на једну годину, будући да је номинална каматна стопа дата на годишњем нивоу.

Период улагања < Период
капиталисања

Период улагања < Период капиталисања — Антиципативно

Када се улаже чешће него што се капиталише, унутар једног периода капиталисања користи се **прост каматни рачун**.

Формула:

$$K_{mn} = U \cdot \left(m + \frac{(m+1)p}{200} \right) \cdot (III_p^{n-1} + 1)$$

гдје је:

- m — број улога унутар једног периода капиталисања
- n — број периода капиталисања
- p — каматна стопа за период капиталисања

Период улагања < Период капиталисања — Декурзивно

Формула:

$$K_{mn} = U \cdot \left(m + \frac{(m-1)p}{200} \right) \cdot (III_p^{n-1} + 1)$$

Разлика од антиципативног:

- $(m + 1)$ постаје $(m - 1)$ у бројиоцу
- Разлог: код декурзивних улога, први улог унутар периода носи мање камате

Период улагања < Период капиталисања

Алтернативни приступ: сви улози унутар једног периода капиталисања се свODE на **један еквивалентни улог** (U_e) на почетку периода.

Формула:

$$K_{mn} = U \cdot \frac{r_c(r^n - 1)}{r_c - 1}$$

гдје је r_c конформни каматни фактор.

Период улагања < Период капиталисања

Формула:

$$K_{mn} = U \cdot \frac{r^n - 1}{r_c - 1}$$

гдје је r_c конформни каматни фактор.

Период улагања > Период
капиталисања

Период улагања > Период капиталисања — Антиципативно

Када се капиталише чешће него што се улаже, сваки улог се пролонгира појединачно користећи сложени каматни рачун.

Формула:

$$K_n = U \cdot \frac{r^m(r^{mn} - 1)}{r^m - 1} = U \cdot \left(\frac{III_p^{mn}}{III_p^m} - 1 \right)$$

гдје је:

- m — број периода капиталисања унутар једног периода улагања
- n — укупан број улога

Период улагања > Период капиталисања — Декурзивно

Формула:

$$K_n = U \cdot \frac{r^{mn} - 1}{r^m - 1} = U \cdot \left(\frac{III_p^{mn}}{III_p^m} \right)$$

- 4.** Улагано је у току 7 година уз 4% и тромјесечно капиталисање. У току прве двије године улагано је на крају сваког полугодишта по ... н.ј; у току наредне 4 године на крају сваке године по ... н.ј, посљедњи улог уложен је на крају седме године и износи ... н.ј. Израчунати износе улога сваке серије и стање на рачуну 2 године након посљедњег улагања, ако је улог прве серије мањи од улога треће серије за 40%, а улог друге већи од улога треће серије за 35% и ако је камата за посљедње двије године износила 894,16 н.ј.
- 5.** Улагано је у току 6 година сваког полугодишта по 20.000 н.ј. уз каматну стопу 7% и полугодишње капиталисање. Колико износи вриједност свих улога: а) једно полугодиште након посљедње уплате и б) у тренутку посљедње уплате?
- 6.** Коначна вриједност 16 тромјесечних антиципативних улога по 4.000 н.ј. износи 106.571,08 н.ј. Колико је времена протекло од завршетка серије до дана реализације ових улога ако је каматна стопа за прве 3 године износила 9%, а надаље 12% уз полугодишње капиталисање?

Дато: $i = 0,04$, $i_r = 0,01$, $U = 0,6U''$, $U' = 1,35U''$, $\sum I = 894,16$

Комбинација:

- 1. серија: период улагања (полугодиште) $>$ период капиталисања (tromјесечје)
- 2. серија: период улагања (година) $>$ период капиталисања (tromјесечје)

Формула:

$$K_n = U \cdot \frac{1,01^{4 \cdot 2} - 1}{1,01^2 - 1} \cdot I_1^{28} + U' \cdot \frac{1,01^{4 \cdot 4} - 1}{1,01^4 - 1} \cdot I_1^{12} + U'' \cdot I_1^8$$

За камату посљедње 2 године:

$$\sum_{t=8}^9 I = K_n - \left[U \cdot \frac{1,01^8 - 1}{1,01^2 - 1} \cdot I_1^{20} + U' \cdot \frac{1,01^{16} - 1}{1,01^4 - 1} \cdot I_1^4 + U'' \right]$$

Дато: $U = 20.000$, $i = 0,07$, $i_r = 0,035$, 6 година $\times 2 = 12$ полугодишта

а) Једно полугодиште након посљедње уплате:

$$K_n = U \cdot III_{3,5}^{12}$$

б) У тренутку посљедње уплате (са посљедњом уплатом):

$$K_n = U \cdot III_{3,5}^{11} + U = U \cdot (III_{3,5}^{12-1} + 1)$$

Напомена: Ово је декурзивни случај — посљедњи улог не носи камату.

Наставак: комбиновани задаци са чешћим/ријеђим капиталисањем, рачун варијабилних улога, разни примјери, IV финансијске таблице (рачун ренти) – **вјежбе у седмици од 20. до 24. априла**

Хвала на пажњи!