СТАТИСТИКА / О.С.А.
ВЈЕЖБЕ

ТЕОРИЈСКИ РАСПОРЕДИ

Дарко Милуновић, МА
darko.milunovic@ef.unibl.org

САДРЖАЈ

БИНОМНИ РАСПОРЕД

Познато је из демографских истраживања на једном подручју да су вјероватноће рађања дјечака 0.516, а дјевојчица 0.484.
Колика је вјероватноћа да у породици са четворо дјеце буде:

а) двије дјевојчице,
б) највише двије дјевојчице,
в) једна дјевојчица,
г) најмање једна дјевојчица,
д) ниједна дјевојчица.

а)
p = 0,484 – вјероватноћа рађања дјевојчице,
n = 4 - број елемената у узорку,
x = 2 - број повољних случајева.

$$P(X = X) = \binom{n}{x} \cdot p^{x} \cdot q^{n-x}$$

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=1$$

$$P(X=2)=\binom{4}{2}\cdot p^{2}\cdot q^{4-2}=0{,}37423$$

б)

$$P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=1-\left[P(X=3)+P(X=4)\right]$$
$$=0{,}07089+0{,}26598+0{,}37423=0{,}71110$$

в)
$$P(X=1)=\binom{4}{1}\cdot 0{,}484\cdot 0{,}516^{3}=0{,}26598$$

г)
$$P(X\ge 1)=1-P(X=0)=1-\binom{4}{0}\cdot 0{,}484^{0}\cdot 0{,}516^{4}=1-q^{n}=1-0{,}516^{4}=0{,}92911$$

д)
$$P(X=0)=\binom{4}{0}\cdot 0{,}484^{0}\cdot 0{,}519^{4}=q^{n}=0{,}07089$$

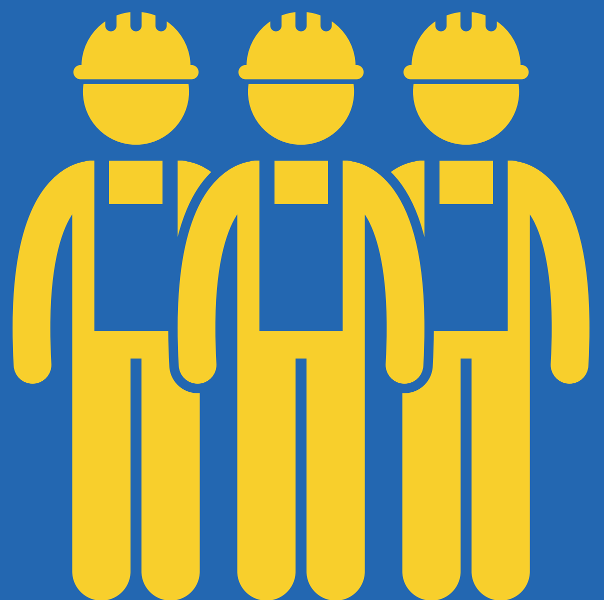
Радници једног предузећа су распоређени према проценту остварења радне норме:

% остварења радне норме	Број радника
до 85	15
85-90	30
90-95	40
95-100	20
преко 100	15
укупно	120

Израчунати вјероватноћу да случајним избором 7 радника буде:

а) највише 2 радника који су остварили радну норму,

б) најмање 2 радника који су остварили радну норму.



$$p = \frac{15}{120} = 0{,}125$$

а)

$$P(X = 0) = \binom{7}{0} \cdot 0{,}125^0 \cdot 0{,}875^7 = 0{,}393$$

$$P(X = 1) = \binom{7}{1} \cdot 0{,}125^1 \cdot 0{,}875^6 = 0{,}393$$

$$P(X = 2) = \binom{7}{2} \cdot 0{,}125^2 \cdot 0{,}875^5 = 0{,}168$$

$$P(X \le 2) = 0{,}954$$

б)

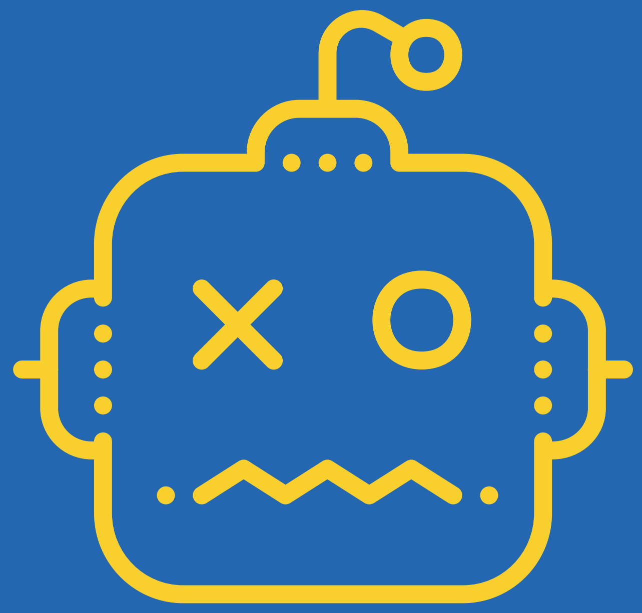
$$P(X \ge 2) = 1 - \left[P(X = 0) + P(X = 1)\right] = 1 - 0{,}786 = 0{,}214$$

Једна машина производи 2% неисправних производа. Приликом провјере квалитета рада ове машине случајно је узет узорак од 100 производа.Колика је вјероватноћа да се у узорку налазе највише два неисправна производа?

$n=100$

$p=0,02$

$p \leq 0,05$: $n \leq 20$



ПОИСОНОВ РАСПОРЕД

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{x}}{x!}$$

гдје је:

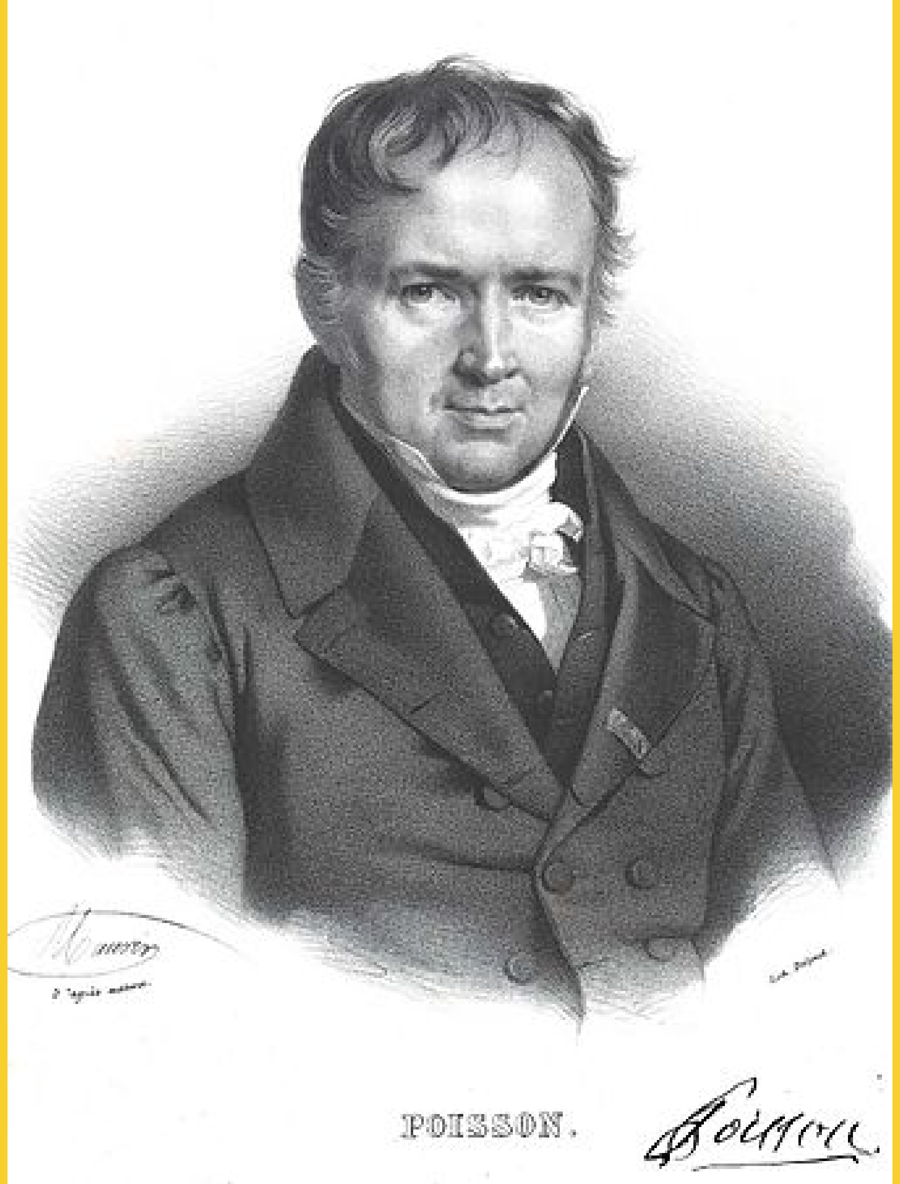
$$\lambda=n\cdot p=100\cdot 0{,}02=2$$

$$P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=$$

$$=\frac{e^{-2}\cdot 2^{0}}{0!}=\frac{e^{-2}\cdot 2^{1}}{1!}=\frac{e^{-2}\cdot 2^{2}}{2!}=$$

$$=e^{-2}(1+2+2)=5\cdot e^{-2}=$$

$$=5\cdot 2{,}71828^{-2}=0{,}67668$$



$$P(X>2)=1-P(X\le 2)=1-0{,}91027=0{,}08973$$

$$P(X=0)=\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{x}}{x!}=\frac{e^{-1{,}05}\cdot 1{,}05^{0}}{0!}=0{,}34994$$

$$P(X=1)=\frac{e^{-1{,}05}\cdot 1{,}05^{1}}{1!}=0{,}36743$$

$$P(X=2)=\frac{e^{-1{,}05}\cdot 1{,}05^{2}}{2!}=0{,}19290$$

б)

$$\lambda-1\le x\le\lambda \qquad np-1\le M_o\le np$$

$$\frac{M_o}{p}\le n\le\frac{M_o+1}{p}\Rightarrow\frac{5}{0{,}03}\le n\le\frac{5+1}{0{,}03}\Rightarrow 167\le n\le 200$$

Од 40 призвода 30 је I класа. Случајно је изабрано 5 производа.
Колика је вјероватноћа да међу изабраним производима буду:

a) 3 производа I класе,
б) највише 3 производа I класе.

N=40
n=5

n / N = 5 / 40 *100 = 12,5% ≥ 5%

ХИПЕРГЕОМЕТРИЈСКИ РАСПОРЕД

С обзиром на то да узимамо узорак без понављања, а и стопа избора је већа од 5%, користи се овај модел...

$$P(X=x)=\frac{\binom{N_1}{x}\cdot\binom{N_2}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

а)

$$P(X=3)=\frac{\binom{30}{3}\cdot\binom{10}{2}}{\binom{40}{5}}=0{,}27766$$

б)

$$P(X\le 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=$$

$$=\frac{\binom{30}{0}\cdot\binom{10}{5}+\binom{30}{1}\cdot\binom{10}{4}+\binom{30}{2}\cdot\binom{10}{3}+\binom{30}{3}\cdot\binom{10}{2}}{\binom{40}{5}}=0{,}36695$$

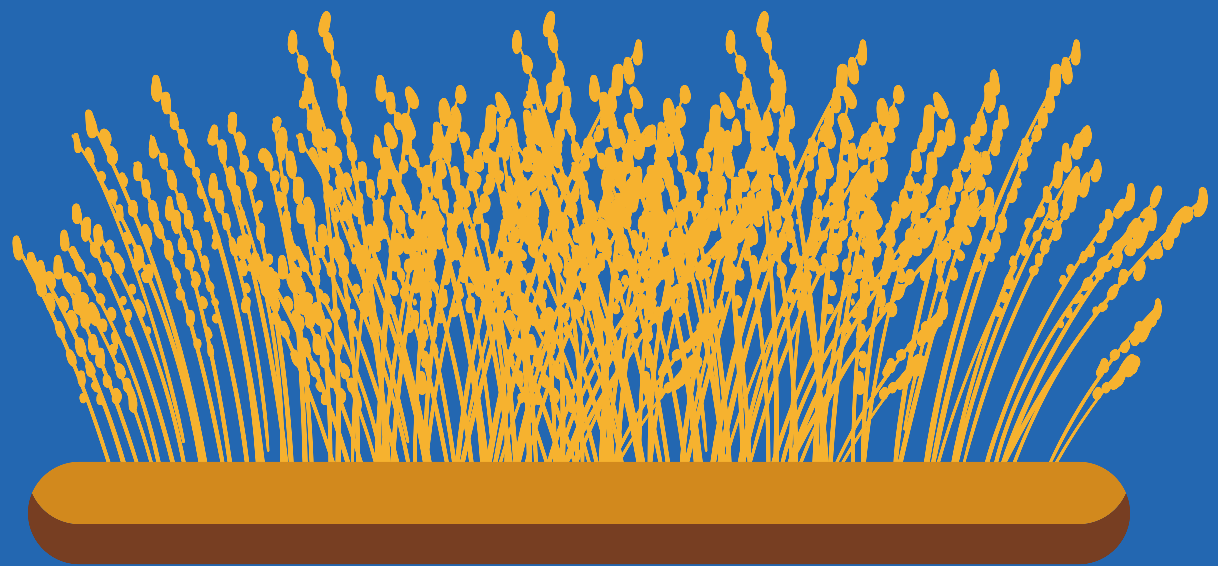
НОРМАЛАН РАСПОРЕД

Према оствареном приносу пшенице 200 хектара једног подручја имало је:

а) Испитати да ли дати распоред има карактеристике нормалног распореда?
б) Израчунати теоријске фреквенције и упоредити их са емпиријским.
в) Одредити % површине на којој је остварен принос:

1. до 3.3 t/ha
2. 3.3 – 6.6 t/ha
3. преко 6.6 t/ha

Принос t/ha	Број хектара
до 3,5	4
3,5 - 4,5	17
4,5 - 5,5	56
5,5 - 6,5	79
6,5 - 7,5	32
7,5 – више	12
-	200



a) Да би неки емпиријски распоред имао карактеристике нормалног, потребно је да буду испуњени сљедећи услови:

1. $\mu \approx M_e \approx M_o$
2. $\alpha_3 \approx 0$
3. $\alpha_4 \approx 3$

Морамо израчунати ове дескриптивне мјере:

$\bar{x} = \mu = 5{,}77$ $\quad M_e = 5{,}791$ $\quad M_o = 5{,}829$

$\sigma = 1{,}071$

$\alpha_3 = -0{,}046$ $\quad \alpha_4 = 3{,}010$

На основу ових параметара може се извести прелиминарни закључак – **овај распоред не одступа пуно од нормалног** (јер су резултати приближни датим условима).

Што су мање разлике, оцјена је тачнија!

б) За одређивање теоријских вјероватноћа потребно је извршити апроксимацију (стандардизацију) нормалног распореда.

формула која се користи за стандардизацију је:

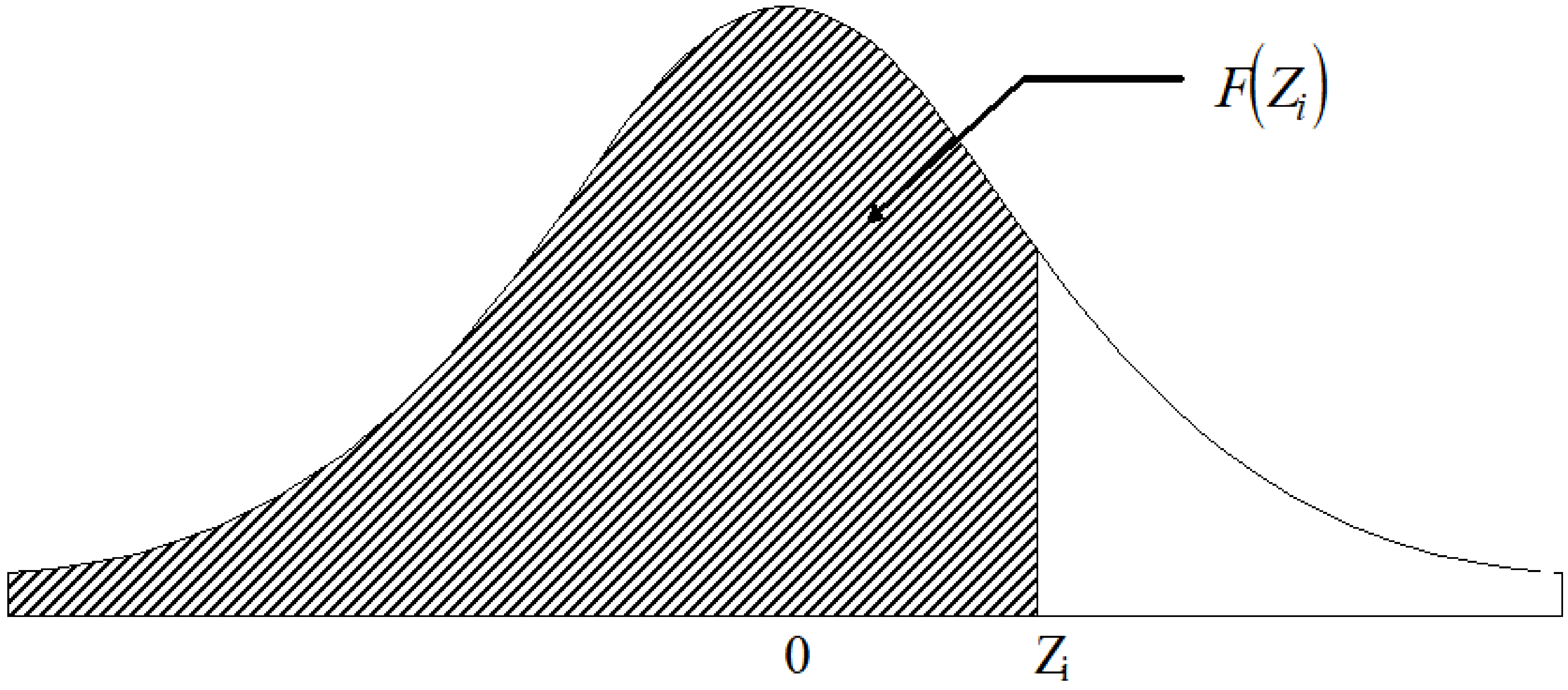
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Z – показује одступање и смјер одступања вриједности нормалне промјењиве X од аритметичке средине, исказано у стандардним девијацијама.

Вјероватноћа да промјењива Z узме вриједност од одређене вриједности дата је функцијом:

$$F(Z_i) = P(Z \leq Z_i)$$

Важна напомена: вриједност Z увијек се односи на лијеву страну графикона, тј. показује % (чита се у таблицама – бр. 3) који објашњава дату појаву до вриједности Zi



$$Z_1=\frac{3{,}5-5{,}77}{1{,}071}=-2{,}12\Rightarrow F(Z_1)=0{,}0170$$

$$Z_2=\frac{4{,}5-5{,}77}{1{,}071}=-1{,}19\Rightarrow F(Z_2)=0{,}1170$$

$$Z_4=\frac{6{,}5-5{,}77}{1{,}071}=0{,}68\Rightarrow F(Z_4)=0{,}7517$$

$$Z_3=\frac{5{,}5-5{,}77}{1{,}071}=-0{,}25\Rightarrow F(Z_3)=0{,}4013$$

$$Z_5=\frac{7{,}5-5{,}77}{1{,}071}=1{,}61\Rightarrow F(Z_5)=0{,}9463$$

Принос t/ha	Број хектара	Теоријске вјероватноће	f_i^*
до 3,5	4	$F(Z_1)=0.0170$	3,40
3,5 - 4,5	17	$F(Z_2)-F(Z_1)=0.1$	20,00
4,5 - 5,5	56	$F(Z_3)-F(Z_2)=0.2843$	56,86
5,5 - 6,5	79	$F(Z_4)-F(Z_3)=0.3504$	70,08
6,5 - 7,5	32	$F(Z_5)-F(Z_4)=0.1946$	38,92
7,5 - више	12	$1-F(Z_5)=0.0537$	10,74
-	200	1,00	200

в) проценат површине на којима је остварен принос **до 3.3 t/ha**, се одређује на сљедећи начин:

$$Z_1 = \frac{3{,}3 - 5{,}77}{1{,}071} = -2{,}31 \Rightarrow F(Z_1) = F(-2{,}31) = 0{,}0104$$

између 3.3 и 6.6 t/ha:

$$P(x_1 < X < x_2) = P(z_1 < Z < z_2) \quad F(z_2) - F(z_1)$$

$$z_1 = \frac{3{,}3 - 5{,}77}{1{,}071} = -2{,}31 \Rightarrow F(z_1) = 0{,}0104$$

$$z_2 = \frac{6{,}6 - 5{,}77}{1{,}071} = 0{,}77 \Rightarrow F(z_2) = 0{,}7794$$

$$P(3{,}3 < x < 6{,}6) = P(z_1 < Z < z_2) = F(z_2) - F(z_1) = 0{,}7794 - 0{,}0104 = 0{,}769$$

преко 6.6 t/ha:

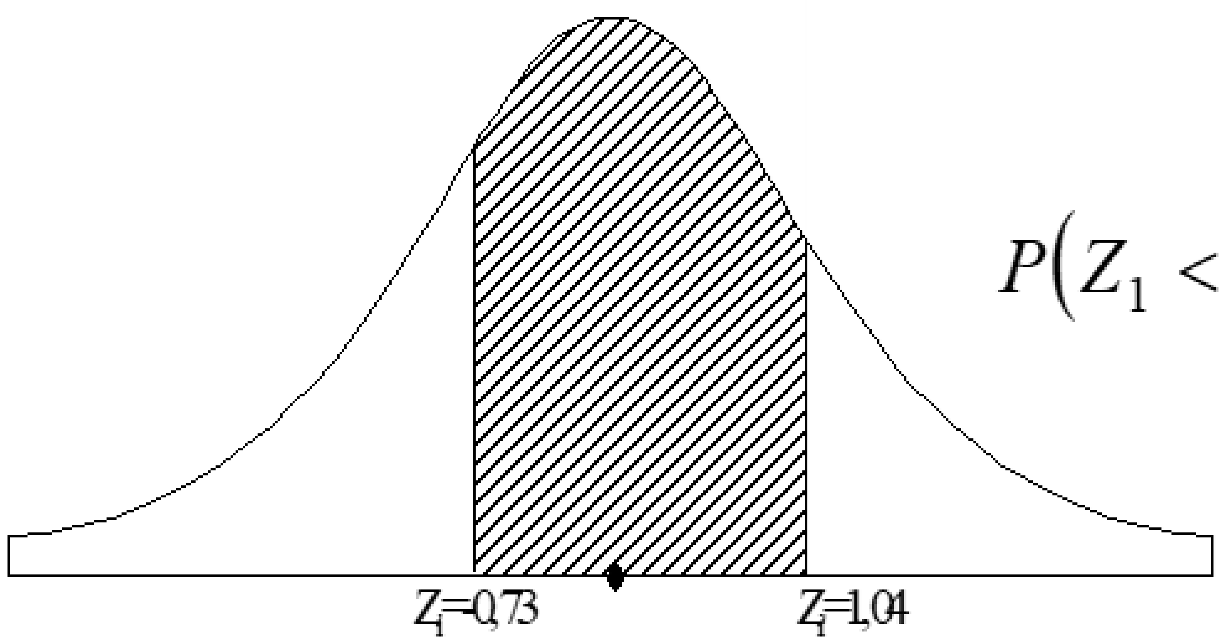
$$P(x > 6{,}6) = 1 - F(z_2) = 1 - 0{,}7794 = 0{,}2206$$

Дати су подаци о распореду 415 радника једног предузећа према оствареним зарадама:

Зараде (КМ)	Број радника
до 300	50
300 - 400	87
400 - 500	160
500- 600	78
600 и више	40
-	415

Одредити % и број радника који су остварили зараду између 360 и 560 КМ

$$\mu = 443{,}01 \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 \cdot f_i}{\sum f_i} - \bar{x}^2} = 112{,}26$$



$$P(Z_1 < Z < Z_2) = F_2 - F_1 = 0{,}6181$$

$$Z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{360 - 443{,}01}{112{,}26} = -0{,}73 \Rightarrow F(Z_1) = 0{,}2327$$

$$Z_1 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{560 - 443{,}01}{112{,}26} = 1{,}04 \Rightarrow F(Z_2) = 0{,}8508$$

$$f = N \cdot 0{,}6181 = 415 \cdot 0{,}6181 = 256{,}5 \approx 257$$

Вијек трајања неког уређаја је нормално распоређена случајна промјењива, чија просјечна вриједност износи 200 часова. Колико смије бити највеће просјечно одступање од те вриједности ако се захтјева да:

а) 90% тих уређаја има вијек трајања дужи од 150 часова;
б) 30% тих уређаја има вијек трајања између 200 и 240 часова.

а) X=150;

$$F(Z_1) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1 \Rightarrow Z_1 = -1{,}28 = \frac{150-200}{\sigma_1} \Rightarrow \sigma_1 = 39{,}0625$$

б)

$$F(Z_2) = 0{,}5 + 0{,}3 = 0{,}8 \Rightarrow Z_2 = 0{,}84 = \frac{240-200}{\sigma_2} \Rightarrow \sigma_2 = 47{,}619$$