

ТЕОРИЈА ВЈЕРОВАТНОЋЕ

ВЈЕЖБЕ



ДАРКО МИЛУНОВИЋ, МА
darko.milunovic@ef.unibl.org



Пермутације

$$P_n = n!$$

$$P_{\frac{n}{k_1, k_2, \dots, k_n}} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}$$

Комбинације

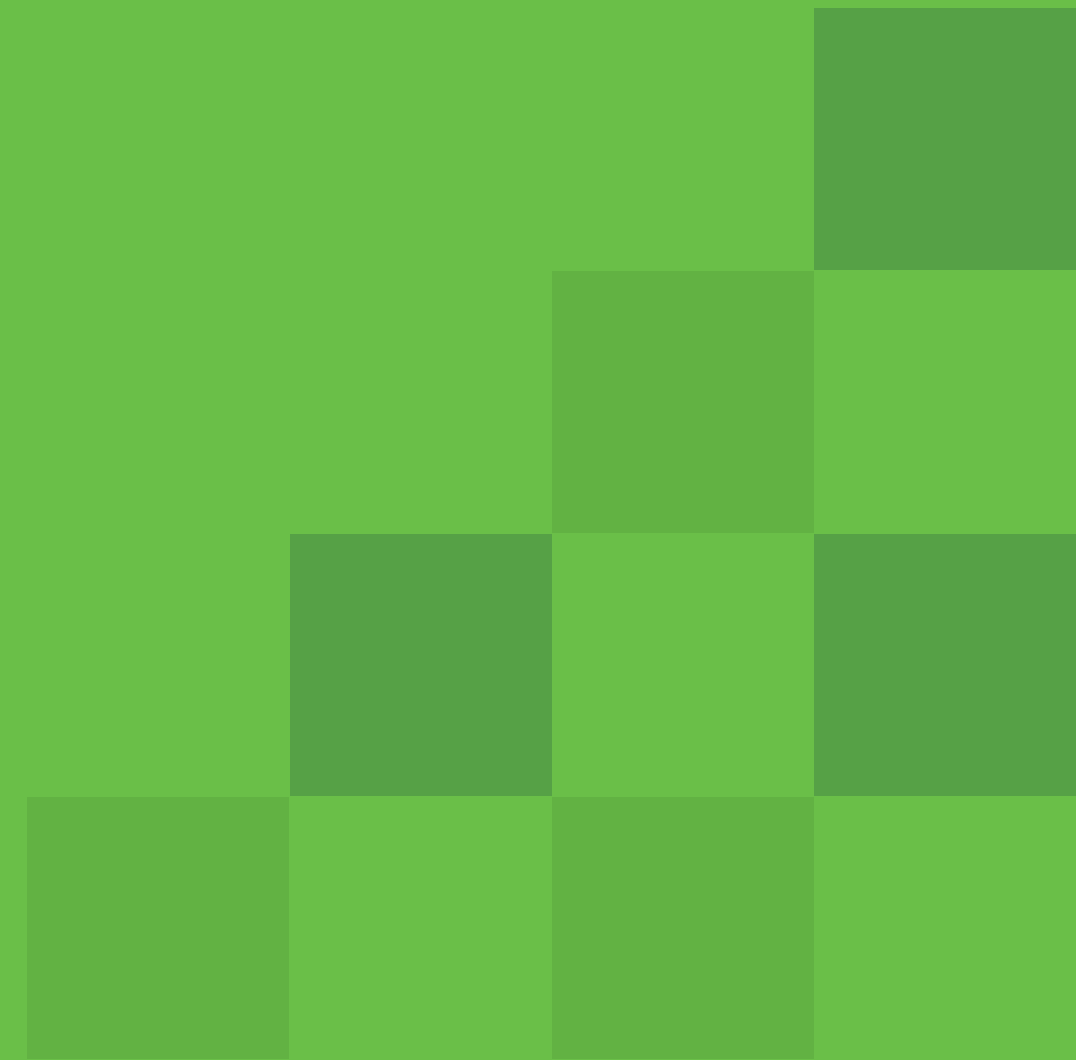
$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

$$\overline{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$$

Варијације

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$\overline{V}_n^k = n^k$$



1. ЗАДАТАК

Неписмено дијете саставља ријечи од слова ААИИКССТТТ.
Колика је вјероватноћа да ће саставити ријеч СТАТИСТИКА ?

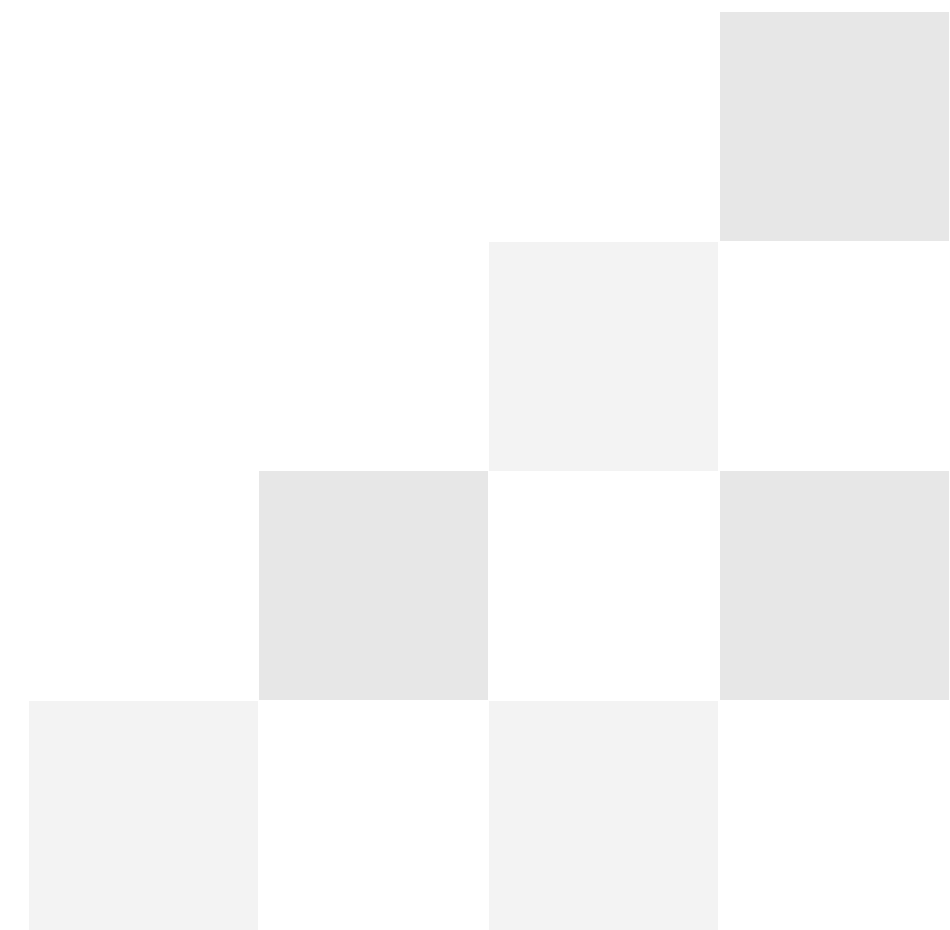
$$p = \frac{1}{P_{10/2,2,2,3}} = \frac{1}{\frac{10!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 3!}} = 0,000013$$



2. ЗАДАТАК

Од петнаест (15) производа једанаест (11) је производа прве класе. Случајно се узима 6 производа. Колика је вјероватноћа да од 6 узетих производа буду 4 производа прве класе ?

$$p = \frac{\binom{11}{4} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{15}{6}} = \frac{1980}{5005} = 0.39560$$



3. ЗАДАТАК

Новчић се баца четири пута.
Колика је вјероватноћа да
писмо падне бар једанпут?

$$\bar{V}_2^4 = 2^4 = 16$$

$$P = \frac{15}{16} = 0.9375$$

$$p = 1 - \left(1 - \frac{1}{2}\right)^4 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0,9375$$



4. ЗАДАТАК

У кутији се налази 5 бијелих, 4 црне и 6 црвених куглица.

Извлаче се одједном 3 куглице. Колика је вјероватноћа:

а) да све три куглице буду црне

б) да бар једна куглица буде бијела

в) да двије куглице буду црне и једна црвена

г) да бар двије куглице буду исте боје

$$\text{а)} \quad p = \frac{\binom{4}{3} \binom{11}{0}}{\binom{5+4+6}{3}} = 0,00879$$

$$\text{б)} \quad p = 1 - \frac{\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}} = 0,73626$$

$$\text{в)} \quad p = \frac{\binom{4}{2} \binom{6}{1}}{\binom{15}{3}} = 0,07912$$

г)
бар 2 бијеле:

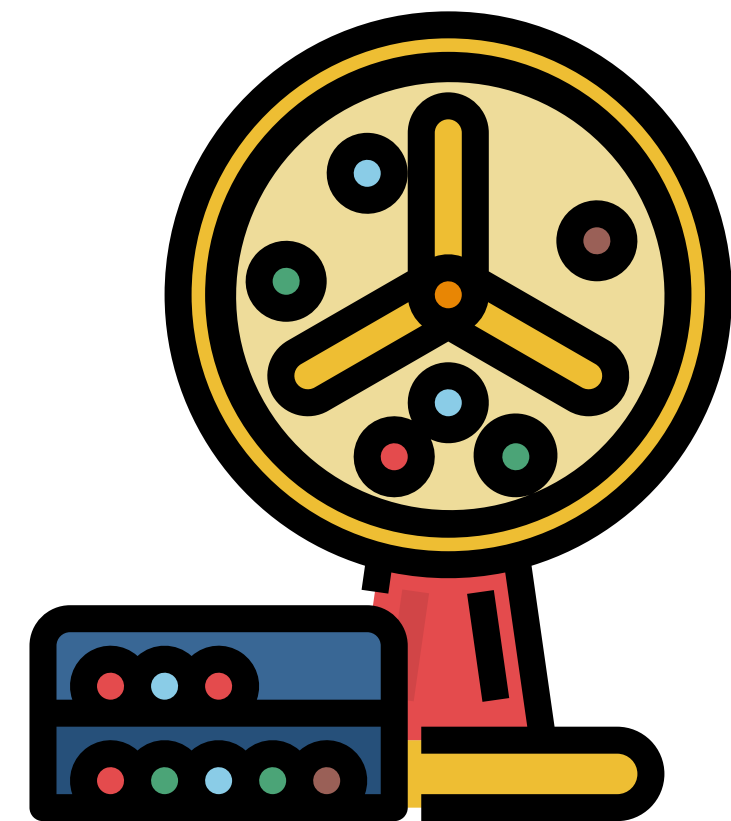
$$p_1 = \frac{\binom{5}{2} \binom{10}{1} + \binom{5}{3} \binom{10}{0}}{\binom{15}{3}} = \dots$$

бар 2 црне:

$$p_2 = \frac{\binom{4}{2} \binom{11}{1} + \binom{4}{3} \binom{11}{0}}{\binom{15}{3}} = \dots$$

бар 2 црвене:

$$p_3 = \frac{\binom{6}{2} \binom{9}{1} + \binom{6}{3} \binom{9}{0}}{\binom{15}{3}} =$$



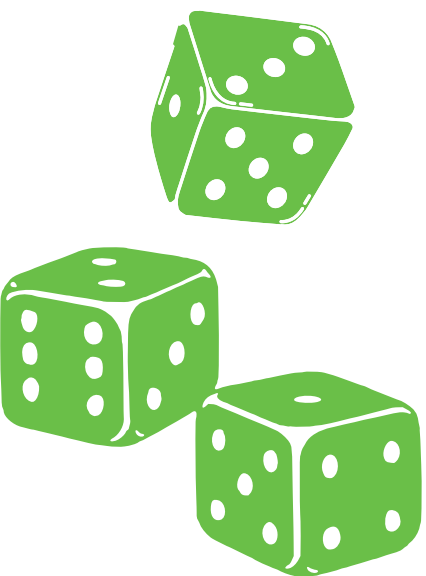
5. ЗАДАТАК

Бацају се истовремено 3 коцке.
Израчунати вјероватноћу:

- а) да падне бар једна јединица
- б) да падну бар 2 једнака броја.

$$p = 1 - \frac{\overline{V}_5^3}{\overline{V}_6^3} = 0,42130$$

$$p = 1 - \frac{V_6^3}{\overline{V}_6^3} = 0,44444$$



6. ЗАДАТАК

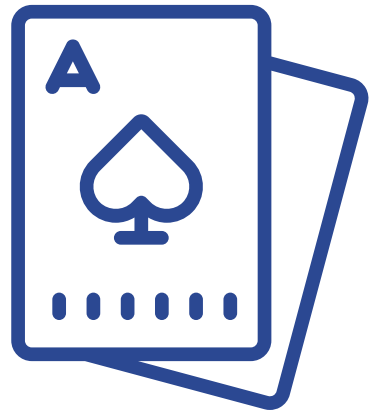
Из шпила од 52 карте случајно се извлаче 3 карте.

Колика је вјероватноћа да се добије:

- а) двије даме
- б) бар један ас

$$p(A) = \frac{\binom{4}{2} \binom{48}{1}}{\binom{52}{3}} = 0,01303$$

$$p(B) = \frac{\binom{4}{1} \binom{48}{2} + \binom{4}{2} \binom{48}{1} + \binom{4}{3} \binom{48}{0}}{\binom{52}{3}} = 0,2173$$



7. ЗАДАТАК

Из шпила од 52 карте извлачимо одједном 4 карте.

Израчунати вјероватноћу да ће:

- а) сума бројева на извученим картама бити паран број,
- б) бити извучена 2 пика и 2 херца.



$$p(A) = \frac{\binom{28}{2} \binom{24}{2} + \binom{24}{4} + \binom{28}{4}}{\binom{52}{4}} = 0,50024 \quad p(B) = \frac{\binom{13}{2} \binom{13}{2} \binom{26}{0}}{\binom{52}{4}} = 0,0225$$

8. ЗАДАТАК

У једном погону раде 3 машине. У току једног дана рада вјероватноћа квара на првој машини износи 0.11, на другој 0.22 и на трећој 0.15.

Израчунати вјероватноћу:

- а) да се ниједна машина неће покварити у току дана,
- б) да бар једна машина неће бити у квару у току дана.

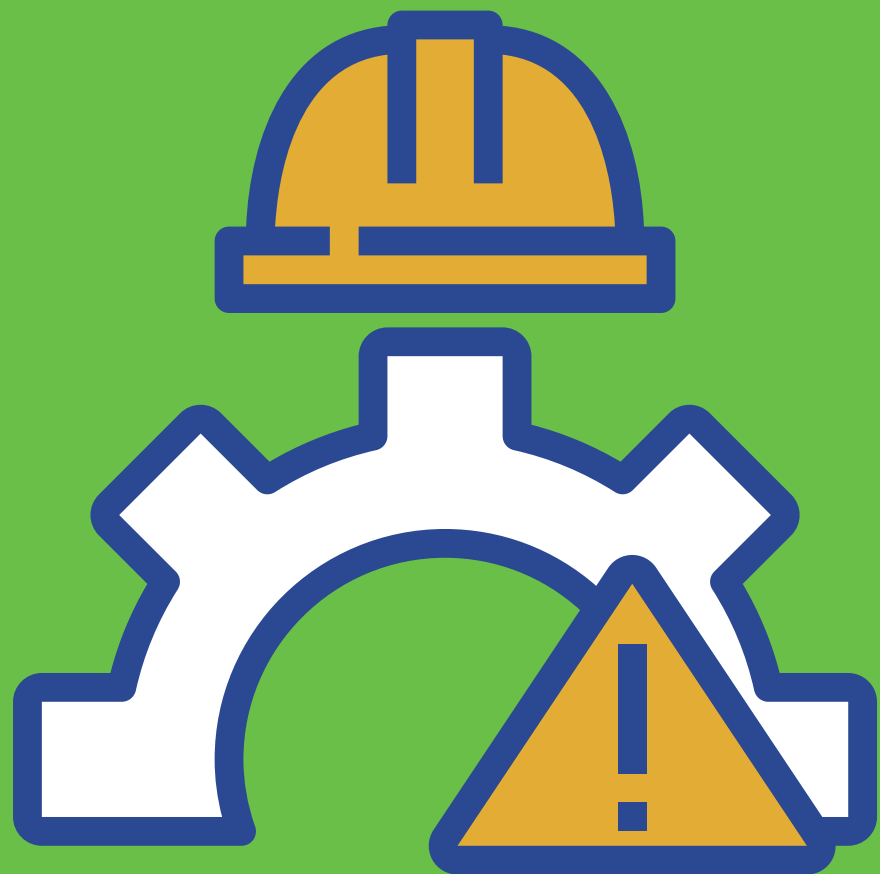
$$p(\bar{A}) = 0,11$$

$$p(\bar{B}) = 0,22$$

$$p(\bar{C}) = 0,15$$

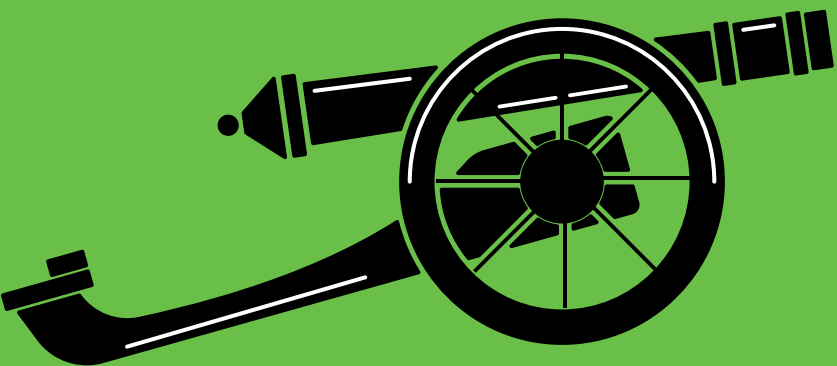
$$p(ABC) = p(A) \cdot p(B) \cdot p(C) = 0,89 \cdot 0,78 \cdot 0,85 = 0,59007$$

$$p = 1 - p(\bar{A}) \cdot p(\bar{B}) \cdot p(\bar{C}) = 1 - 0,11 \cdot 0,22 \cdot 0,15 = 0,99637$$



9. ЗАДАТАК

Два топа гађају једну мету са различитих удаљености. Вјероватноћа да ће погодити први топ износи 0,7 а други топ 0,4. Оба топа пуцају истовремено. Колика је вјероватноћа да ће мета бити погођена?



$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A) \cdot p(B) = 0,7 + 0,4 - 0,7 \cdot 0,4 = 0,82$$

10. ЗАДАТАК

Колика је вјероватноћа да из шпила од 32 карте извучемо узастопно 3 аса ако карте:

- а) враћамо у шпил
- б) не враћамо у шпил.

$$p(A) = \left(\frac{4}{32}\right)^3 = 0,00195$$

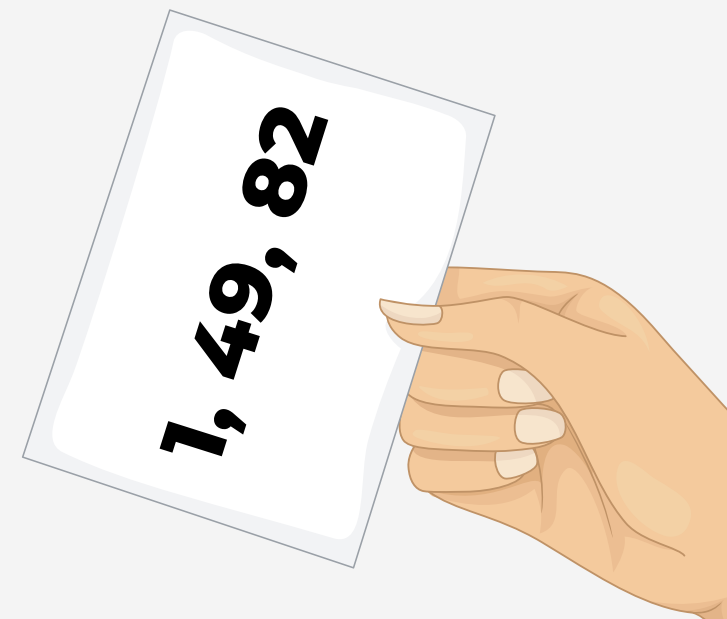
$$p(B) = \frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31} \cdot \frac{2}{30} = 0,00081$$

11. ЗАДАТАК

Студент долази на испит знајући 85 од 100 питања. На испиту извлачи цедуљу са 3 питања (претпоставимо да су цедуље сачињене од питања без обзира на дијелове испитне материје, тако да на једној цедуљи нађу прва три питања заредом итд.). Колика је вјероватноћа да ће овај студент положити испит, ако је потребно одговорити на сва три питања из цедуље?

$$p = \frac{\binom{85}{3}}{\binom{100}{3}} = 0,61$$

$$p = \frac{85}{100} \cdot \frac{84}{99} \cdot \frac{83}{98} = 0,61$$



12. ЗАДАТАК

У једној кутији се налазе 4 бијеле и 2 црне куглице. Куглице се на случај извлаче једна за другом без враћања док се све не извуку. Колика је вјероватноћа да прве четири извучене куглице буду бијеле, а последње двије црне?

$$p = \frac{P_4 \cdot P_2}{P_6} = \frac{4! \cdot 2!}{6!} = 0,06666$$

$$p(A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = 0,06666$$



13. ЗАДАТАК

Црвене и бијеле куглице су размејештене у 3 кутије:

1. кутија: 6 црвених и 2 бијеле куглице

2. кутија: 2 црвених и 1 бијеле куглице

3. кутија: 3 црвених и 3 бијеле куглице

Случајно смо одабрали 2 кутије и из сваке извукли по једну куглицу. Израчунати вјероватноћу да смо извукли:

а) обе црвене куглице,

б) обе куглице исте боје.

$$p = \frac{1}{3} \left(\frac{6}{8} \cdot \frac{2}{3} + \frac{6}{8} \cdot \frac{3}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{6} \right) = \frac{29}{72} = 0,40278$$

$$p = \frac{29}{72} + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{8} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{8} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{6} \right) = \frac{19}{36} = 0,5278$$



14. ЗАДАТАК

На једном факултету има 5% студената и 1% студентица који су виши од 180 цм, док је однос броја студената и студентица 4 : 6. Ако смо случајно изабрали једног полазника са овог факултета, израчунати вјероватноћу:

- да смо изабрали полазника вишег од 180 цм
- ако знамо да смо изабрали полазника вишег од 180 цм, да се ради о студенту.

А - полазник је виши од 180 цм

B_1 - полазник је студентица

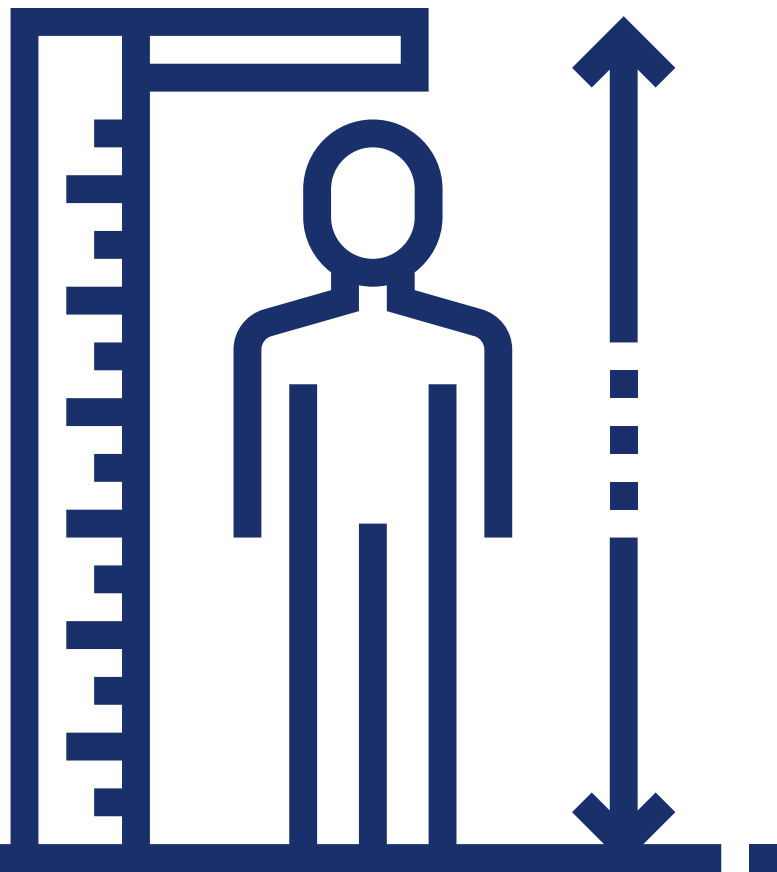
B_2 - полазник је студент

$$P(B_1) = 0,6 \quad P(A/B_1) = 0,01$$

$$P(B_2) = 0,4 \quad P(A/B_2) = 0,05$$

$$p(A) = p(B_1) \cdot p(A/B_1) + p(B_2) \cdot p(A/B_2) = 0,6 \cdot 0,01 + 0,4 \cdot 0,05 = 0,026$$

$$p(B_2 / A) = \frac{p(B_2) \cdot p(A / B_2)}{p(A)} = 0,7692$$



ХВАЛА

НА

ПАЖЊИ